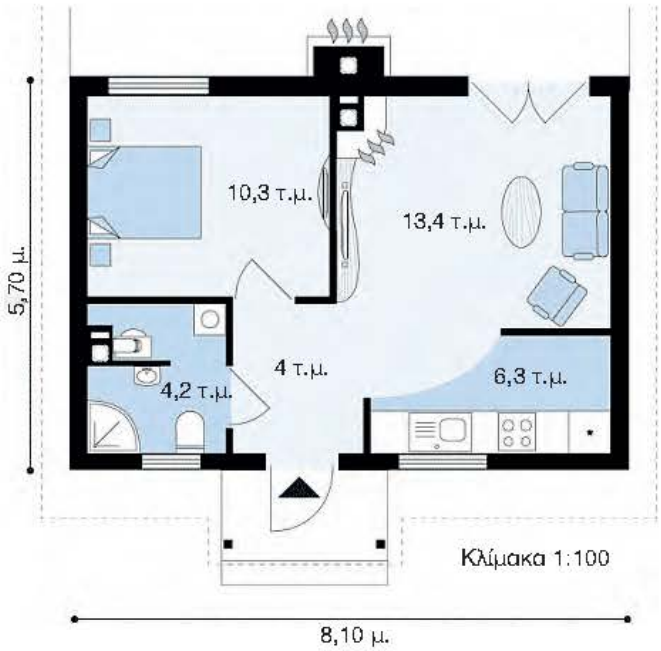
Ενότητα 7

Διερεύνηση

1. Πώς μπορούμε να κάνουμε μεγέθυνση



Ένας αρχιτέκτονας έφτιαξε το διπλανό σχέδιο ενός διαμερίσματος σε κλίμακα $\frac{1}{100}$ ή 1:100.

Συζητάμε:

α. τι είναι η κλίμακα,

β. πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις πραγματικές διαστάσεις του διαμερίσματος με βάση το σχέδιο του αρχιτέκτονα.

2. Πώς μπορούμε να κάνουμε σμίκρυνση

Οι μαθητές της Ε΄ τάξης μέτρησαν τις διαστάσεις του δαπέδου της αίθουσάς τους και βρήκαν ότι έχει μήκος 6 μ. και πλάτος 5 μ.

Σχεδιάζουμε το δάπεδο της αίθουσας με βάση τις πραγματικές διαστάσεις της:

α. σε κλίμακα $\frac{1}{100}$ ή 1:100,

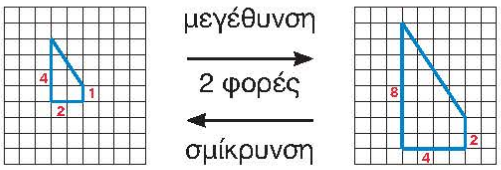
β. σε κλίμακα $\frac{1}{50}$ ή 1:50.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

- Για να μεγεθύνουμε ένα σχέδιο ή μια εικόνα, **πολλαπλασιάζουμε** κάθε απόσταση μεταξύ δύο σημείων του σχεδίου ή της εικόνας με τον ίδιο αριθμό.
- Για να σμικρύνουμε ένα σχέδιο ή μια εικόνα, **διαιρούμε** κάθε απόσταση μεταξύ δύο σημείων του σχεδίου ή της εικόνας με τον ίδιο αριθμό.

Η **κλίμακα** ενός σχεδίου ή μιας εικόνας εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στην απόσταση δύο σημείων του τελικού σχεδίου ή της τελικής εικόνας και στην αντίστοιχη απόσταση στο αρχικό σχέδιο ή στην αρχική εικόνα.

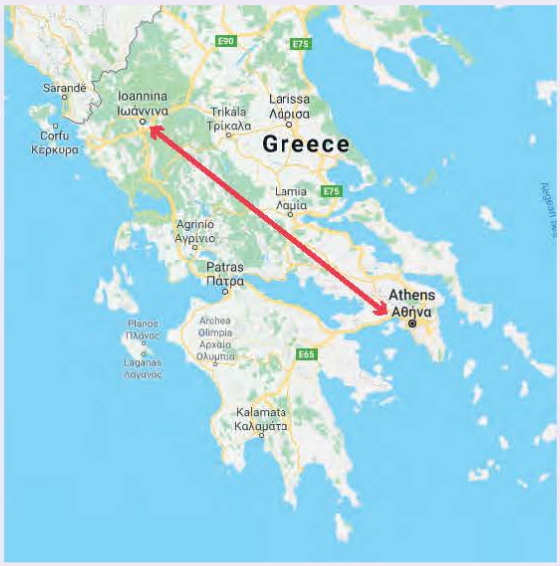
Παραδείγματα



Κλίμακα $\frac{1}{2}$ ή 1:2 σημαίνει ότι 1 εκ. στο τελικό σχέδιο αντιστοιχεί σε 2 εκ. του αρχικού.

Κλίμακα $\frac{2}{1}$ ή 2:1 σημαίνει ότι 2 εκ. στο τελικό σχέδιο αντιστοιχούν σε 1 εκ. του αρχικού.

Εφαρμογή



Τα Ιωάννινα απέχουν από την Αθήνα 313 χμ. σε ευθεία γραμμή. Να βρεις πόσα εκ. είναι η απόστασή τους σε έναν χάρτη κλίμακας 1:3.130.000.

Κλίμακα 1 : 3.130.000 σημαίνει ότι 1 εκ. στον χάρτη αντιστοιχεί σε 3.130.000 εκ., δηλαδή ο χάρτης δείχνει την απόσταση 3.130.000 φορές μικρότερη. Η πραγματική απόσταση των Ιωαννίνων από την Αθήνα είναι 313 χμ.= 313.000 μ.= 31.300.000 εκ. Επομένως στον χάρτη η απόσταση είναι 31.300.000 εκ : 3.130.000 = 10 εκ.

Αναστοχασμός

1. Κυκλώνουμε τις περιπτώσεις στις οποίες γίνεται μεγέθυνση:

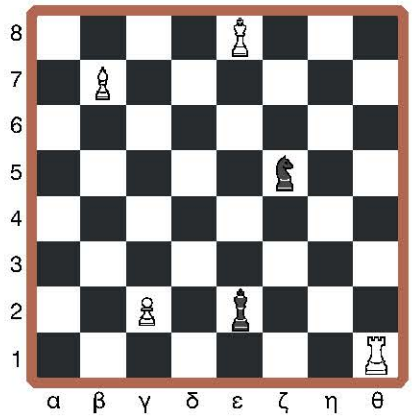
   α. στο μικροσκόπιο β. στο τηλεσκόπιο

2. Ο Νίκος υποστηρίζει ότι η κλίμακα είναι το πηλίκο της απόστασης στο σχέδιο προς την πραγματική απόσταση. Έχει δίκιο; Ναι ή όχι και γιατί;

3. Η Δανάη υποστηρίζει ότι, αν το μήκος που μετρήθηκε στην επιφάνεια της γης είναι 900 μ., τότε σε χάρτη κλίμακας 1 : 90.000 αντιστοιχεί σε 1 εκ. Έχει δίκιο; Ναι ή όχι και γιατί;

Διερεύνηση

1. Το **σκάκι** είναι ένα επιτραπέζιο παιχνίδι στρατηγικής, το οποίο παίζεται ανάμεσα σε δύο παίκτες. Στους επίσημους αγώνες οι κινήσεις κάθε παρτίδας καταγράφονται.



Προέκυψε επομένως η ανάγκη να μπορεί κανείς να προσδιορίσει με μοναδικό τρόπο κάθε συγκεκριμένη θέση πάνω στη σκακιέρα.

α. Χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο γράμμα και αριθμό, προσδιορίζουμε τη θέση του Αξιωματικού λευκού χρώματος πάνω στη σκακιέρα: .....

β. Σε ποια οριζόντια γραμμή και κατακόρυφη στήλη βρίσκεται ο Βασιλιάς μαύρου χρώματος; .....

γ. Ποιο κομμάτι του σκακιού βρίσκεται στη θέση (ζ ,5);

.....

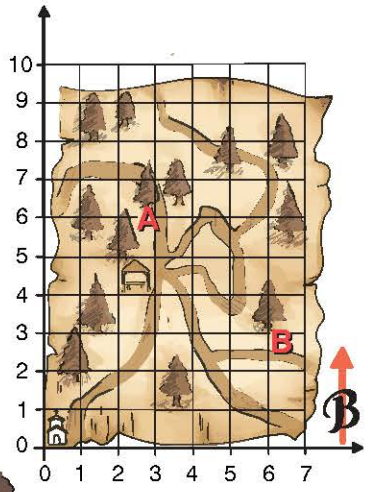
Βασιλιάς, Αξιωματικός, Πύργος, Ίππος, Πιόνι

δ. Είναι αρκετό να γνωρίζουμε ότι ο Βασιλιάς λευκού χρώματος βρίσκεται στη γραμμή 8, για να προσδιορίσουμε με μοναδικό τρόπο τη θέση του; Εξηγούμε. .....

2. Τα παιδιά παίζουν το παιχνίδι του κρυμμένου θησαυρού και κρατάνε στο χέρι τους έναν χάρτη και τις οδηγίες.

ΟΔΗΓΙΕΣ: Ψάξτε στη ρίζα του δέντρου που είναι 6 τετράγωνα ανατολικά και 3 τετράγωνα βόρεια από το εκκλησάκι.

Σημείωση: πλευρά τετραγώνου = 50 μέτρα.



α. Ποιο παιδί έχει δίκιο; .....

β. Αν γράψουμε το σημείο Β ως (6,3), πώς θα γράψουμε το σημείο Α; .....

γ. Αν ο χάρτης δεν είχε σημείο αναφοράς το εκκλησάκι αλλά το κιόσκι, τι θα άλλαζε;

.....

Συζητάμε στην τάξη τη βοήθεια που προσφέρουν οι δύο κάθετες αριθμογραμμές και το σημείο αναφοράς, το (0,0), στον προσδιορισμό της θέσης ενός συγκεκριμένου σημείου πάνω στον χάρτη με έναν μοναδικό τρόπο.

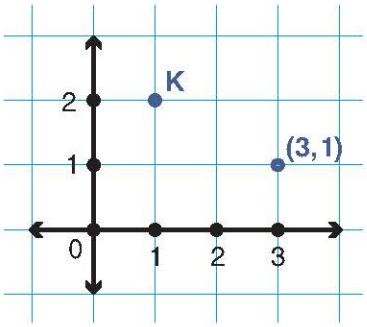
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Για τον προσδιορισμό ενός σημείου χρησιμοποιούμε **δύο αριθμογραμμές κάθετες** μεταξύ τους, μία **οριζόντια** και μία **κατακόρυφη**.

Ο **προσδιορισμός της θέσης** κάθε σημείου γίνεται με τον συνδυασμό των δύο τιμών οι οποίες δείχνουν πόσο απέχει το σημείο αυτό οριζόντια και κατακόρυφα από τις αριθμογραμμές.

Οι τιμές εξαρτώνται κάθε φορά από το **σημείο αναφοράς**, δηλαδή το σημείο (0,0).

Παραδείγματα



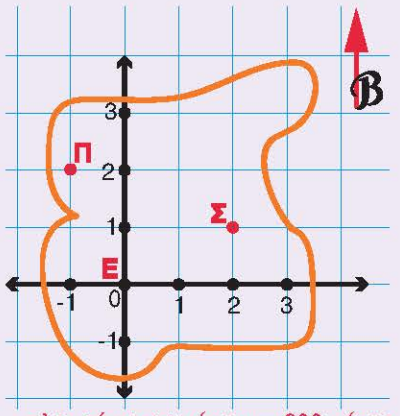
Το σημείο Κ είναι το (1,2)

Εφαρμογή

1. Τα παιδιά έχουν κατασκηνώσει στο δάσος. Πώς θα μετακινηθούν από τη σπηλιά (Σ) όπου έστησαν τη σκηνή τους, στην πηγή (Π), για να πάρουν νερό;

α. Τα σημεία Σ και Π απέχουν μεταξύ τους στην οριζόντια αριθμογραμμή 3 τετράγωνα, δηλαδή ..... μέτρα και στην κατακόρυφη 1 τετράγωνο, δηλαδή ..... μέτρα.

β. Ο χάρτης δείχνει τον βορρά. Επομένως, για να πάνε από τη σπηλιά στην πηγή με τη βοήθεια πυξίδας, θα περπατήσουν 600 μέτρα βόρεια και μετά ..... μέτρα δυτικά.



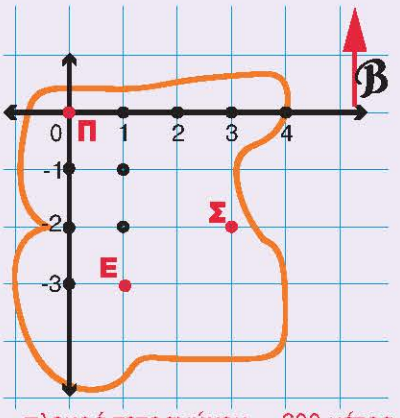
πλευρά τετραγώνου = 600 μέτρα

2. Τα παιδιά, όταν γύρισαν, είπαν στους συμμαθητές τους ότι κατασκήνωσαν στη θέση (2,1) σε μια σπηλιά. Είχαν δίκιο;

α. Το σημείο Σ, όπου βρίσκεται η σπηλιά, στον χάρτη των παιδιών είναι ..... τετράγωνα ανατολικά από το Ε και ... τετράγωνο βόρεια. Άρα είναι το σημείο (...,...)

β. Αν όμως τα παιδιά χρησιμοποιούσαν έναν χάρτη, όπως τον διπλανό, με ένα άλλο σημείο αναφοράς, π.χ. την πηγή, τότε το σημείο Σ θα ήταν (3, -2), δηλαδή διαφορετικό.

Άρα η θέση του κάθε σημείου εξαρτάται από το σημείο αναφοράς.



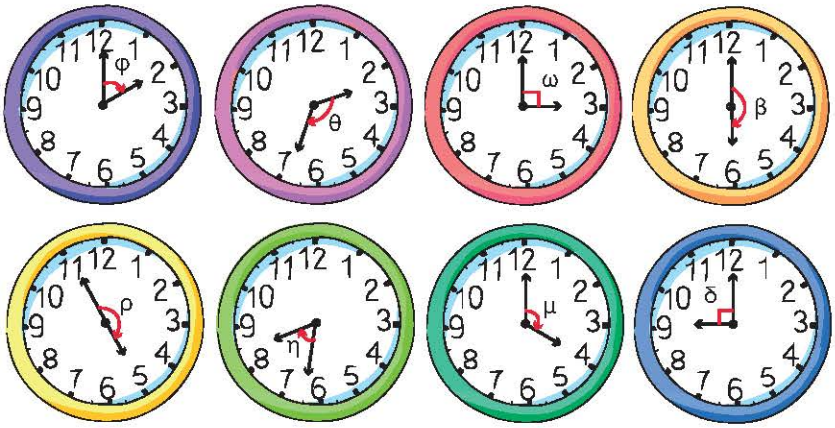
πλευρά τετραγώνου = 600 μέτρα

Αναστοχασμός

1. Σε έναν χάρτη ο οποίος στο πάνω μέρος δείχνει τον βορρά, εξηγούμε ποια πόλη βρίσκεται πιο δυτικά: αυτή που είναι στο σημείο (2,9) ή αυτή που είναι στο σημείο (9,2);

Διερεύνηση

1. Οι δείκτες των ρολογιών στις παρακάτω εικόνες δείχνουν διαφορετική ώρα.

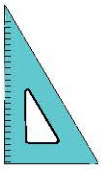


Συζητάμε ομοιότητες και διαφορές που παρατηρούμε στις γωνίες που σχηματίζουν οι δείκτες των ρολογιών.

α. Γράφουμε τα ζεύγη των γωνιών που έχουν το ίδιο άνοιγμα.

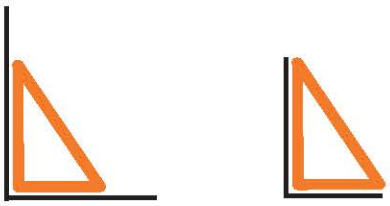
.....

β. Κατατάσσουμε τις γωνίες ανάλογα με το άνοιγμά τους.

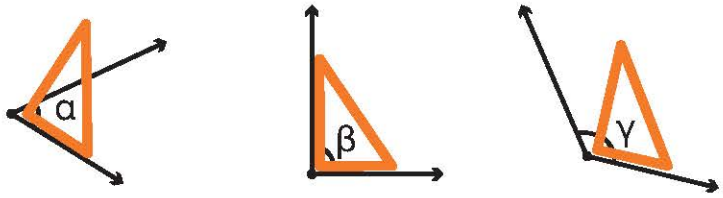


1. Οι γωνίες ..... και ..... είναι ορθές.
2. Οι γωνίες ..... και ..... είναι μικρότερες από την ορθή.
3. Οι γωνίες ....., ... , ... και ..... είναι μεγαλύτερες από την ορθή.
4. Ελέγχουμε χρησιμοποιώντας τον γνώμονα.

2. Η Αγγελική και ο Νίκος χρησιμοποίησαν τους γνώμονες που είχαν και κατασκεύασαν τις παρακάτω γωνίες.

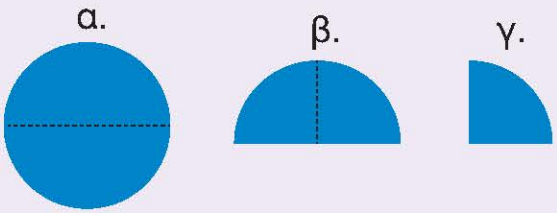


Συζητάμε αν έχει δίκιο η Αγγελική και εξηγούμε στους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές μας τον τρόπο με τον οποίο σκεφτήκαμε.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Οι γωνίες διακρίνονται σε: • **Οξείες**, οι οποίες είναι μικρότερες από την ορθή γωνία, • **Ορθές**, • **Αμβλείες**, οι οποίες είναι μεγαλύτερες από την ορθή γωνία.	 οξεία γωνία ορθή γωνία αμβλεία γωνία

Εφαρμογή

Να κόψετε τον κύκλο από το παράρτημα. Να διπλώσετε το χαρτί σε δύο ίσα μέρη. Να διπλώσετε ξανά το χαρτί σε δύο ίσα μέρη.



- Τι γωνία προέκυψε μετά τα τρία παραπάνω βήματα;.....

  .....

  .....

- Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το "εργαλείο" αυτό, για να ελέγξετε το είδος της γωνίας;

  .....

  .....

  .....

- Να χρησιμοποιήσετε το "εργαλείο" που φτιάξατε. Να εντοπίσετε μέσα στην τάξη τα τρία είδη γωνιών που μάθατε και να εξηγήσετε το είδος τους.

  .....

  .....

  .....

  .....

Αναστοχασμός

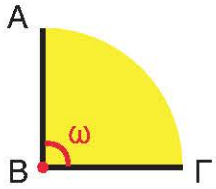
1. Πώς μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μια γωνία είναι οξεία ή αμβλεία;
2. Πώς μας βοηθά μια σελίδα χαρτιού μεγέθους Α4 να βρούμε το είδος μιας γωνίας;
3. Ανοίγουμε την πόρτα της τάξης μας. Σχηματίζουμε μία οξεία, μία ορθή και μία αμβλεία γωνία. Συζητάμε τι σημαίνει η έκφραση: «Άνοιξε περισσότερο την πόρτα».

Διερεύνηση

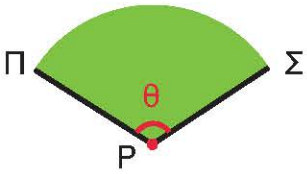
1. **α.** Πόσες **πλευρές** και πόσες **κορυφές** έχει κάθε γωνία;

.....

β. Ο Νίκος ονόμασε στον παρακάτω πίνακα τη χρωματισμένη γωνία του σχήματος 1. Συμπληρώνουμε τον πίνακα ονομάζοντας τη χρωματισμένη γωνία του σχήματος 2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Σχήμα 1	Σχήμα 2
$\hat{\omega}$	
$A\hat{B}\Gamma$	

Συζητάμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να ονομάσουμε μια γωνία.

2. Παρατηρούμε τις παραπάνω γωνίες. Ποια από τις δύο είναι μεγαλύτερη;

Συζητάμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να συγκρίνουμε τις δύο γωνίες.

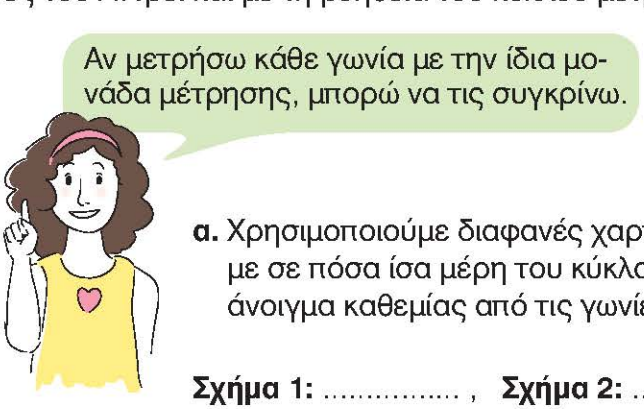
α΄ τρόπος: **α.** Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε τις γωνίες με τον τρόπο που προτείνει ο Νίκος;

.....

.....

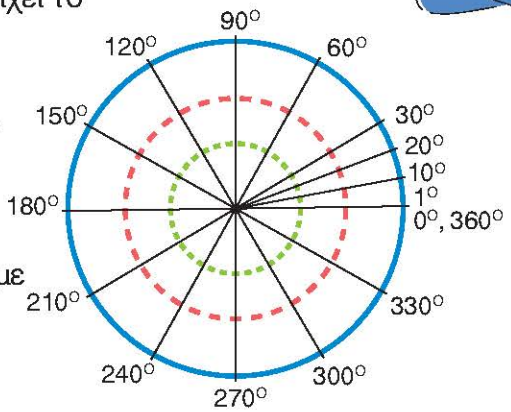
β. Ποια γωνία είναι η μεγαλύτερη; .....

β΄ τρόπος: Αξιοποιούμε την ιδέα της Δανάης και τις πληροφορίες του Αντρέι και με τη βοήθεια του κύκλου μετράμε τις γωνίες.



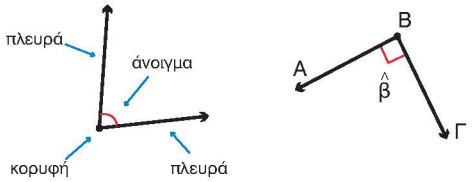
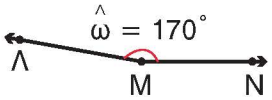
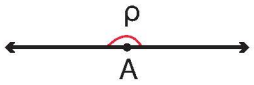
α. Χρησιμοποιούμε διαφανές χαρτί και βρίσκουμε σε πόσα ίσα μέρη του κύκλου αντιστοιχεί το άνοιγμα καθεμίας από τις γωνίες.

Σχήμα 1: ..... , **Σχήμα 2:** .....



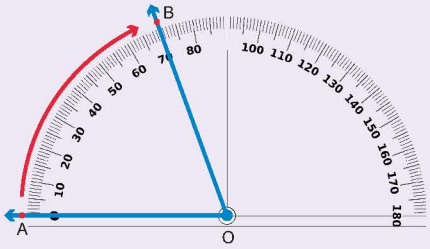
β. Ποια γωνία είναι η μεγαλύτερη; .....

γ. Παρατηρούμε και συζητάμε τι θα συμβεί, αν μετρήσουμε με τον μπλε, τον κόκκινο ή τον πράσινο κύκλο.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
• Η **γωνία** έχει δύο πλευρές και μία κορυφή. • Η γωνία μπορεί να ονομαστεί με: ✓ ένα μικρό γράμμα στο εσωτερικό της, ✓ τρία κεφαλαία γράμματα, από τα οποία πάντα το μεσαίο γράμμα είναι η κορυφή της. Γράφουμε τη γωνία προσθέτοντας ένα ειδικό σύμβολο (^) πάνω από τη γωνία.	 Η γωνία $\hat{\beta}$ ή η γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$
• Μετράμε τη γωνία σε **μοίρες** (°) με ένα όργανο που λέγεται **μοιρογνωμόνιο**. • Ένας κύκλος διαιρείται σε 360°.	
• Μία γωνία **180°** ονομάζεται **ευθεία γωνία**. • Η **ορθή γωνία** είναι 90°.	 $\hat{\rho} = 180°$

Εφαρμογή

1. Να χρησιμοποιήσετε το μοιρογνωμόνιο, για να κατασκευάσετε μία γωνία 70°.



1ο βήμα: Κατασκευάζουμε με τον γνώμονα τη μία πλευρά της γωνίας και σημειώνουμε την κορυφή Ο και ένα σημείο Α.

2ο βήμα: Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμόνιου στην κορυφή της γωνίας.

3ο βήμα: Η μία πλευρά της γωνίας πρέπει να διέρχεται από την ένδειξη 0 της κλίμακας στο μοιρογνωμόνιο.

4ο βήμα: Μετράμε πάνω στην κλίμακα που αντιστοιχεί στο 0 που χρησιμοποιήσαμε. Βρίσκουμε το 70° και βάζουμε εκεί ένα σημείο Β.

5ο βήμα: Σχεδιάζουμε τη δεύτερη πλευρά της γωνίας ενώνοντας το σημείο Β με την κορυφή Ο.

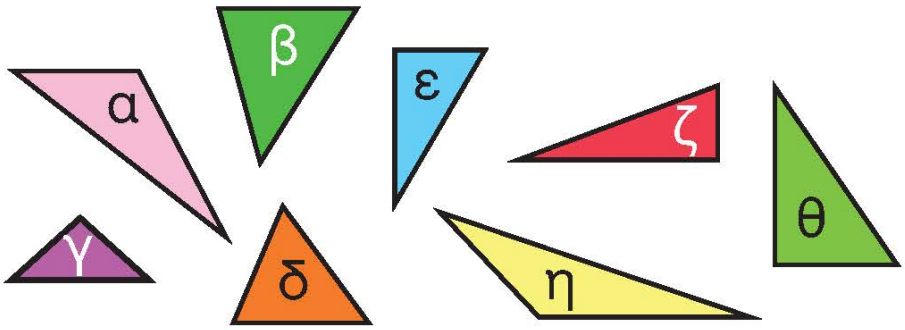
6ο βήμα: Η γωνία ..... είναι αυτή που κατασκευάσαμε.

Αναστοχασμός

1. Η Αγγελική και η Δανάη μέτρησαν μία γωνία με το μοιρογνωμόνιό τους. Η Δανάη είπε ότι η γωνία είναι 130° και η Αγγελική 50°. Ποιο λάθος φαίνεται ότι κάνει ένα από τα δύο κορίτσια; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.
2. Σχεδιάζουμε μία γωνία και την ονομάζουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους.
3. Οι πλευρές μίας γωνίας βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Πόσες μοίρες είναι η γωνία;

Διερεύνηση

1. Βρίσκουμε ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στα παρακάτω τρίγωνα και τις συζητάμε στην τάξη.



α. Βρίσκουμε δύο ομοιότητες που έχουν όλα τα τρίγωνα **ως προς τις γωνίες** τους.

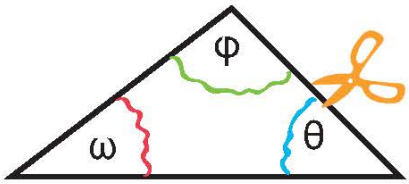
1η ομοιότητα: .....

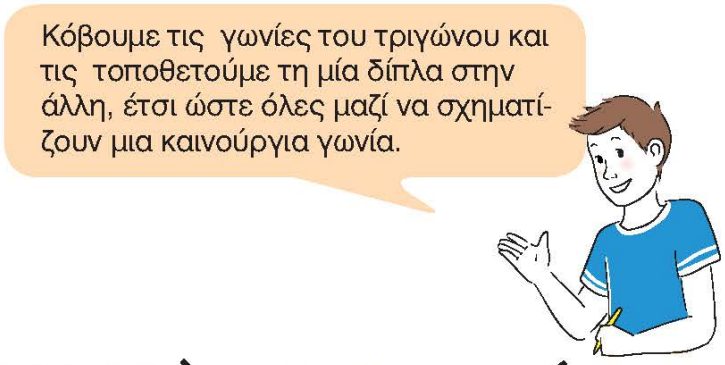
2η ομοιότητα: .....

β. Κατατάσσουμε τα παραπάνω τρίγωνα σε τρεις ομάδες με κοινό χαρακτηριστικό το είδος των γωνιών που έχουν, έτσι ώστε κάθε τρίγωνο να ανήκει σε μία μόνον ομάδα.

	Τρίγωνα	Είδος γωνιών
1η ομάδα		Τα τρίγωνα έχουν ..... .
2η ομάδα		Τα τρίγωνα έχουν ..... .
3η ομάδα		Τα τρίγωνα έχουν ..... .

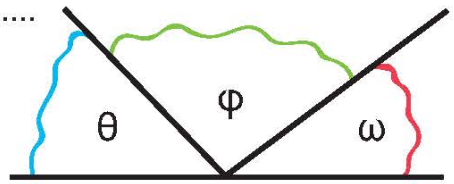
2. Σχεδιάζουμε σε χαρτόνι τρίγωνα και προτείνουμε τρόπους, για να βρούμε το άθροισμα των γωνιών τους.





Παρατηρούμε ότι:

$\hat{\theta} + \hat{\varphi} + \hat{\omega} =$ .....



Συζητάμε στην τάξη αν το άθροισμα των γωνιών είναι το ίδιο για οποιοδήποτε τρίγωνο.

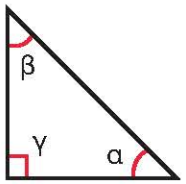
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

- Κάθε τρίγωνο έχει τρεις γωνίες και τρεις πλευρές.
- Όλα τα τρίγωνα έχουν τουλάχιστον 2 οξείες γωνίες.

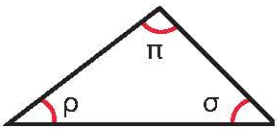
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°.

Το τρίγωνο που περιέχει:
- ✓ τρεις οξείες γωνίες ονομάζεται **οξυγώνιο**,
- ✓ ορθή γωνία ονομάζεται **ορθογώνιο**,
- ✓ αμβλεία γωνία ονομάζεται **αμβλυγώνιο.**

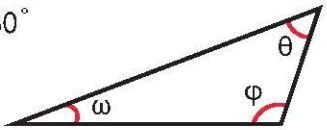
Παραδείγματα



Ορθογώνιο τρίγωνο
$\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}=180^\circ$



Οξυγώνιο τρίγωνο
$\hat{\pi}+\hat{\rho}+\hat{\sigma}=180^\circ$



Αμβλυγώνιο τρίγωνο
$\hat{\omega}+\hat{\varphi}+\hat{\theta}=180^\circ$

Εφαρμογή

Να κατασκευάσετε μέσα στο πλαίσιο ένα τρίγωνο.

α. Να ονομάσετε τις γωνίες του.

β. Με τη βοήθεια του μοιρογνωμόνιου να μετρήσετε κάθε γωνία του.

γ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Γωνία	Μοίρες	Είδος γωνίας

δ. Με βάση τον παραπάνω πίνακα να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου: .....

ε. Να συζητήσετε στην τάξη το ενδεχόμενο κάποιοι συμμαθητές σας και κάποιες συμμαθήτριές σας να μην έχουν βρει την ίδια τιμή στο άθροισμα των γωνιών του τριγώνου με εσάς, αλλά κάποια άλλη τιμή κοντά σε αυτήν.

- Γιατί μπορεί να συμβεί κάτι τέτοιο;
- Με ποιον τρόπο θα μπορούσατε να εργαστείτε, ώστε να ισχυριστείτε με σιγουριά ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°;

Αναστοχασμός

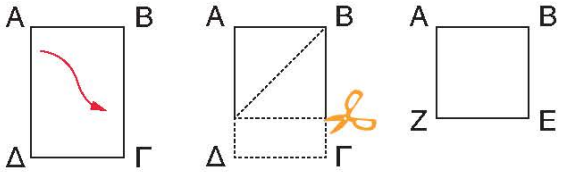
1. Μπορεί ένα τρίγωνο να έχει 2 αμβλείες γωνίες; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.
2. Με βάση τις μοίρες των γωνιών του τριγώνου, ποιο είναι το είδος του τριγώνου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις;

   α. 80°, 65°, 35° β. 90°, 75°, 15° γ. 114°, 33°, 33°
3. Εξηγούμε γιατί ένα τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες.

Διερεύνηση

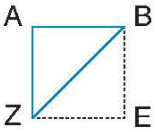
Κατασκευάζουμε τρίγωνα και συγκρίνουμε τις πλευρές τους και τις γωνίες τους.

α. Διπλώνουμε μια σελίδα χαρτί μεγέθους Α4, όπως φαίνεται στην εικόνα, έτσι ώστε να σχηματιστεί τετράγωνο.
Έπειτα διπλώνουμε το τετράγωνο με τέτοιον τρόπο, ώστε η κορυφή Ε να συμπέσει με την κορυφή Α.



α1. Με δίπλωση συγκρίνουμε τις δύο κάθετες πλευρές του τριγώνου ΑΒΖ.

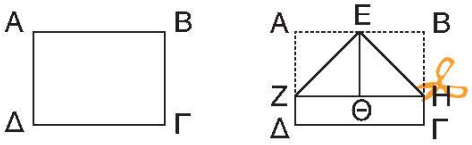
Οι πλευρές ΑΖ και ΑΒ είναι ..... .



α2. Τι συμπεραίνουμε για τις δύο οξείες γωνίες $\widehat{AZB}$ και $\widehat{ABZ}$;

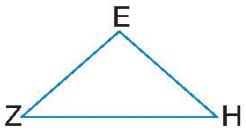
.....

β. Διπλώνουμε μία σελίδα χαρτί μεγέθους Α4, έτσι ώστε η κορυφή Α και η κορυφή Β να συμπέσουν στο σημείο Θ. Κόβουμε τα μέρη που περισσεύουν και έτσι έχουμε το τρίγωνο ΕΖΗ.



β1. Με δίπλωση συγκρίνουμε τις δύο πλευρές ΕΖ και ΕΗ του τριγώνου ΕΖΗ.

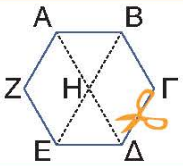
Οι πλευρές ΕΖ και ΕΗ είναι ..... .



β2. Τι συμπεραίνουμε για τις δύο οξείες γωνίες $\widehat{EZH}$ και $\widehat{EHZ}$;

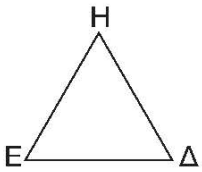
.....

γ. Κόβουμε το εξάγωνο από το παράρτημα. Ενώνουμε με μία ευθεία την κορυφή Α με την κορυφή Δ και την κορυφή Β με την Ε. Σχηματίζεται, έτσι, το τρίγωνο ΕΔΗ.



γ1. Με δίπλωση συγκρίνουμε και τις τρεις πλευρές του τριγώνου ΕΔΗ.

Οι πλευρές ΕΗ, ΕΔ και ΔΗ είναι ..... .



γ2. Τι συμπεραίνουμε για τις τρεις οξείες γωνίες του τριγώνου;

.....

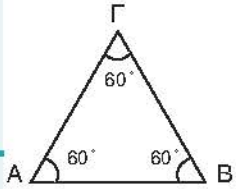
Συζητάμε στην τάξη ποια είδη τριγώνων μπορούμε να διακρίνουμε με κριτήριο τις πλευρές των τριγώνων.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

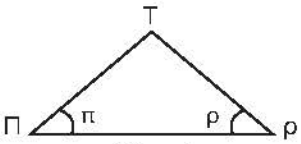
Το τρίγωνο που έχει:
- ✓ και τις τρεις πλευρές του ίσες λέγεται **ισόπλευρο**,
- ✓ μόνο τις δύο πλευρές του ίσες λέγεται **ισοσκελές**,
- ✓ όλες τις πλευρές του άνισες λέγεται **σκαληνό**.

- Το **ισόπλευρο** τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες.
- Το **ισοσκελές** τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, αυτές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές.
- Το **σκαληνό** τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες άνισες.

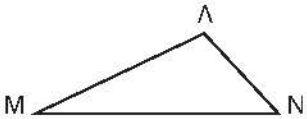
Παραδείγματα



ισόπλευρο τρίγωνο
ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ



ισοσκελές τρίγωνο
ΠΤ=ΤΡ και $\hat{\pi}=\hat{\rho}$



σκαληνό τρίγωνο

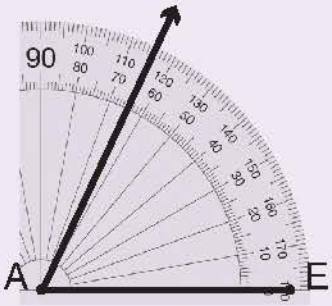
Εφαρμογή

1. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΔΕ με πλευρά ΑΕ=4εκ. και γωνία $\hat{A} = 65^\circ$ και $\hat{E} = 65^\circ$.

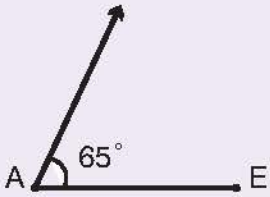
1ο βήμα: Σχεδιάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ = 4εκ.

2ο βήμα: Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμόνιου στο σημείο Α και την ένδειξη 0 της κλίμακας του μοιρογνωμόνιου που θα χρησιμοποιήσουμε πάνω στην πλευρά ΑΕ και προς τα δεξιά.

3ο βήμα: Βρίσκουμε στην κλίμακα το 65° και βάζουμε μια τελεία. Ενώνουμε την τελεία με το σημείο Α. Σχηματίζουμε με τον τρόπο αυτό μια γωνία 65°.



βήμα 1ο, 2ο και 3ο



βήμα 4ο και 5ο

4ο βήμα: Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3. Κατασκευάζουμε με τον ίδιο τρόπο μία γωνία 65° τοποθετώντας το κέντρο του μοιρογνωμόνιου στο σημείο Ε.

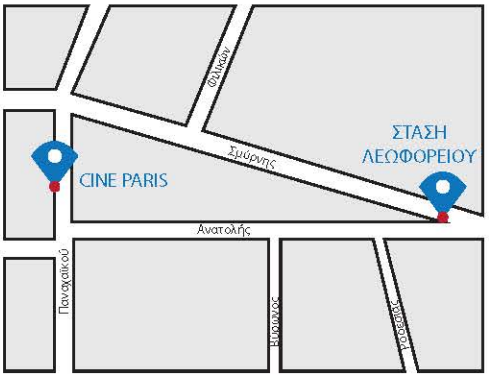
5ο βήμα: Προεκτείνουμε τις δύο πλευρές των γωνιών, μέχρι να συναντηθούν στο σημείο Δ. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΔΕ.

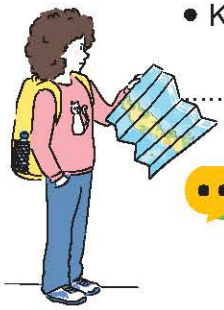
Αναστοχασμός

1. Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το μοιρογνωμόνιο, εξηγούμε γιατί κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.
2. Μπορεί ένα σκαληνό τρίγωνο να είναι και αμβλυγώνιο;

Διερεύνηση

1. Ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσουν τα παιδιά, για να φτάσουν από τη στάση λεωφορείου στο Cine Paris, διανύοντας τη μικρότερη απόσταση; Την οδό Σμύρνης ή την οδό Ανατολής, αν ο κινηματογράφος απέχει το ίδιο από τις δύο οδούς;



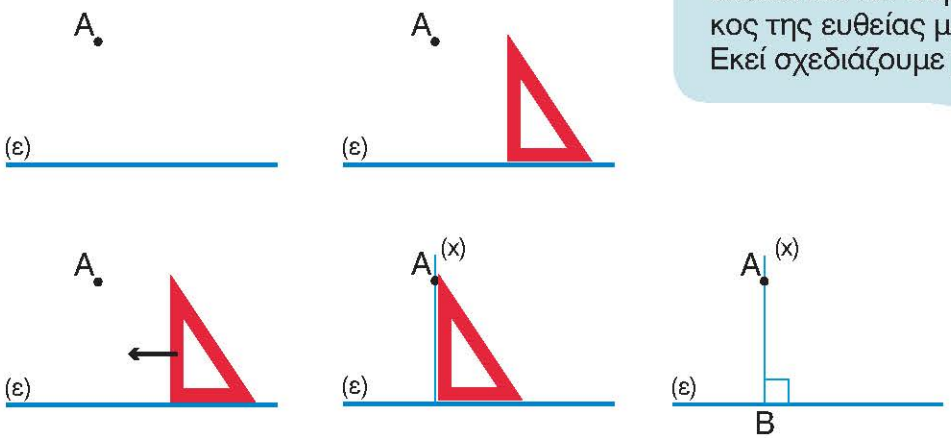


- Κάνουμε μία εκτίμηση: .....

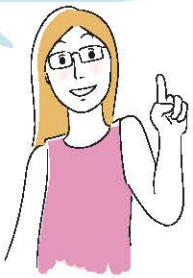
.....

Συζητάμε στην τάξη τις επιλογές μας και καταλήγουμε σε συμπεράσματα για το πώς μετράμε την απόσταση.

2. Βρίσκουμε την απόσταση ενός σημείου Α από μία ευθεία.

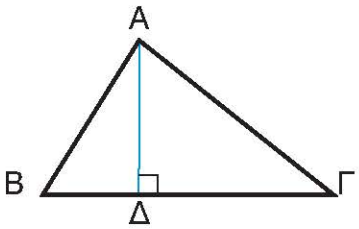


Τοποθετούμε τον γνώμονα με τη μία από τις κάθετες πλευρές πάνω στην ευθεία και τον σύρουμε κατά μήκος της ευθείας μέχρι το σημείο Α. Εκεί σχεδιάζουμε μία ευθεία.

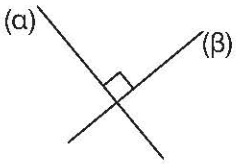
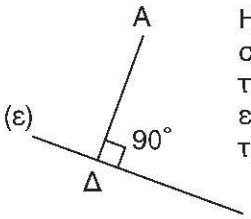
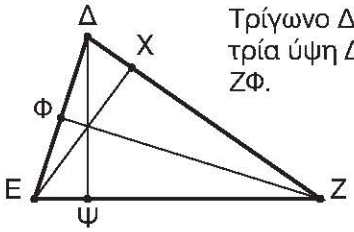


Η απόσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, δηλαδή το μέρος της ευθείας που αρχίζει από το Α και τελειώνει στο Β.

3. Χρησιμοποιούμε τον γνώμονα, για να σχεδιάσουμε τις αποστάσεις από τις άλλες δύο κορυφές Β και Γ του τριγώνου προς τις απέναντί τους πλευρές.

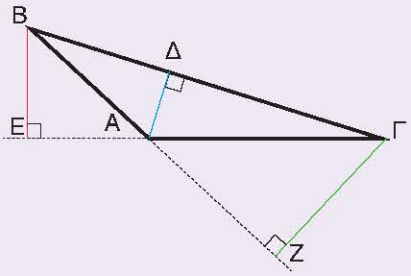


Συζητάμε στην τάξη τις παρατηρήσεις μας για τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που δείχνουν τις αποστάσεις των κορυφών του τριγώνου από τις απέναντί τους πλευρές.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Κάθετες ονομάζονται δύο ευθείες που τέμνονται, έτσι ώστε να σχηματίζουν γωνία 90°. • Για να σχεδιάσουμε κάθετες ευθείες, χρησιμοποιούμε τον **γνώμονα**.	 **Γράφουμε:** α ⊥ β **Διαβάζουμε:** η ευθεία α είναι κάθετη στην ευθεία β.
Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από ένα σημείο και τέμνει κάθετα μια ευθεία ονομάζεται **απόσταση** του σημείου από την ευθεία. • Η **απόσταση** είναι η πιο σύντομη διαδρομή που ενώνει το σημείο με την ευθεία. **Σημείωση:** Ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα τμήμα μιας ευθείας που έχει δύο σημεία για άκρα.	 Η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ.
• Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από μια κορυφή ενός τριγώνου και είναι κάθετο στην απέναντι πλευρά ονομάζεται **ύψος του τριγώνου**. • Κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη. • Τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.	 Τρίγωνο ΔΕΖ με τα τρία ύψη ΔΨ, ΕΧ και ΖΦ. ΔΨ ⊥ ΕΖ ΖΦ ⊥ ΔΕ ΕΧ ⊥ ΔΖ

Εφαρμογή

Να κατασκευάσετε τα ύψη στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ και να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνονται.



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

Παρατηρούμε ότι, για να φέρουμε το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β στην πλευρά ΑΓ, χρειάζεται να προεκτείνουμε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά αυτή.

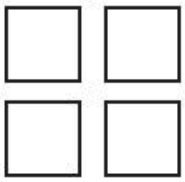
Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, για να φέρουμε και το ύψος ΓΖ από την κορυφή Γ στην πλευρά ΑΒ.

Τα ύψη τέμνονται σε σημείο εκτός του τριγώνου.
Προεκτείνουμε και τα τρία ύψη και βρίσκουμε το σημείο στο οποίο τέμνονται.

Αναστοχασμός

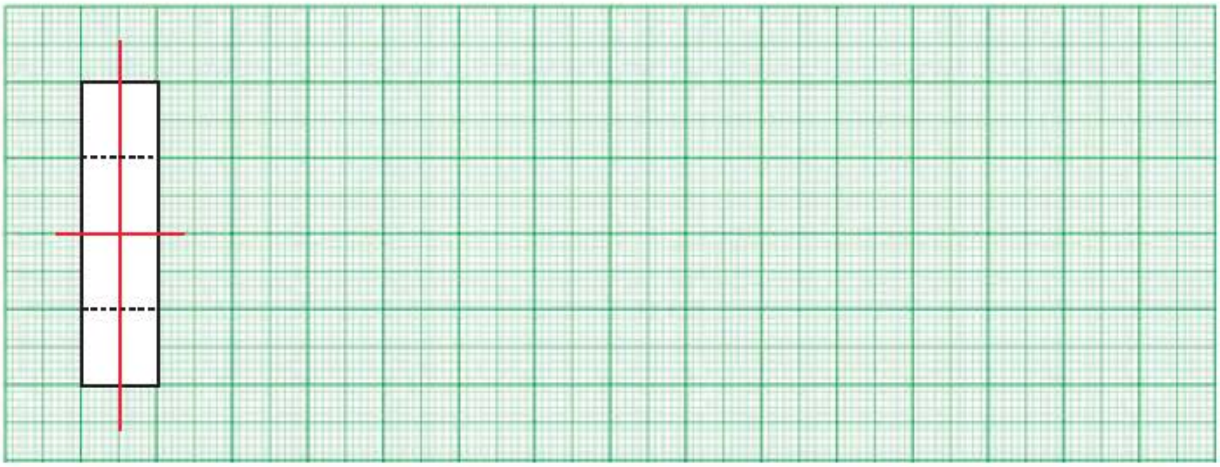
1. Πού βρίσκεται το σημείο όπου συναντιούνται τα τρία ύψη ενός ορθογώνιου τριγώνου;
2. Πού βρίσκεται το σημείο όπου συναντιούνται τα τρία ύψη ενός αμβλυγώνιου τριγώνου;
3. Ποια είναι τα δύο ύψη του ορθογώνιου τριγώνου που είναι πάντοτε σχεδιασμένα;

Διερεύνηση



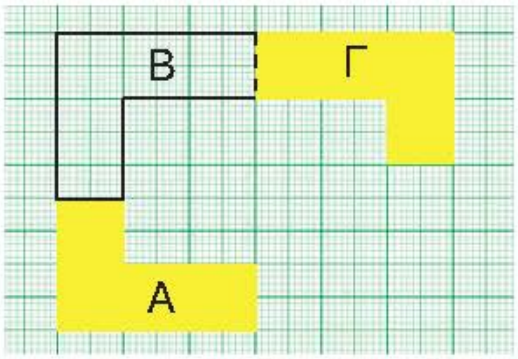
1. Συνδυάζουμε μεταξύ τους 4 ίδια τετράγωνα, έτσι ώστε το σχήμα που θα προκύψει να έχει έναν ή περισσότερους άξονες συμμετρίας.

- Σχεδιάζουμε τα σχήματα που φτιάξαμε στο μιλιμετρέ χαρτί.
- Σχεδιάζουμε τους άξονες συμμετρίας σε κάθε σχήμα, όπως στο παράδειγμα:



Συζητάμε στην τάξη πόσα διαφορετικά σχήματα βρήκαμε.

2. Ο Νίκος άλλαξε το σχήμα Α στο σχήμα Γ χρησιμοποιώντας διαδοχικά άξονες συμμετρίας.



- Σκεφτόμαστε δύο διαφορετικούς τρόπους, για να κάνουμε το ίδιο.

Διπλώνω στην ευθεία του άξονα συμμετρίας και το σχήμα Α αλλάζει θέση και προσανατολισμό. Κάνω το ίδιο στο σχήμα Β με νέο άξονα συμμετρίας και προκύπτει το σχήμα Γ.

Συζητάμε στην τάξη τις αλλαγές που αναμένουμε στο αρχικό σχήμα, αν ο άξονας συμμετρίας κόβει το σχήμα ή αν βρίσκεται εκτός του σχήματος.

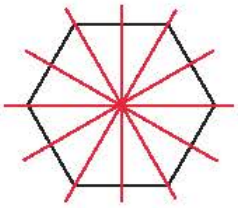
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Ένα σχήμα έχει **άξονα συμμετρίας** μία ευθεία γραμμή, όταν μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα, ώστε το ένα να συμπίπτει με το άλλο, διπλώνοντας το χαρτί κατά μήκος αυτής της γραμμής.

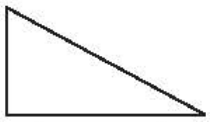
- Η ευθεία αυτή ονομάζεται **άξονας συμμετρίας** του σχήματος.
- Ένα σχήμα μπορεί να έχει κανένα, ένα, δύο ή περισσότερους άξονες συμμετρίας.

Μπορούμε να βρούμε το **συμμετρικό ενός σχήματος** ως προς κάποια ευθεία, που την ονομάζουμε **άξονα συμμετρίας**, όταν διπλώσουμε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας αυτής.

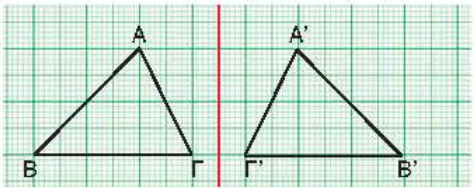
Παραδείγματα



σχήμα με 6 άξονες συμμετρίας

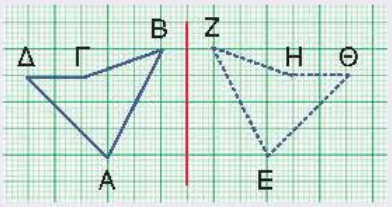


σχήμα με κανένα άξονα συμμετρίας



Εφαρμογή

Να σχεδιάσετε το συμμετρικό του σχήματος ΑΒΓΔ ως προς άξονα συμμετρίας την κόκκινη ευθεία.



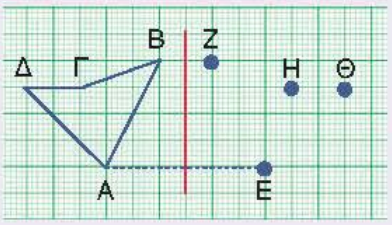
α. Διπλώνοντας το χαρτί κατά μήκος της κόκκινης ευθείας, βρίσκουμε το συμμετρικό του σχήματος ΑΒΓΔ, που είναι το ΕΖΗΘ.

- Τα συμμετρικά σημεία των Α, Β, Γ, Δ είναι αντίστοιχα τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ.
- Όπως γίνεται φανερό με τη δίπλωση, τα συμμετρικά σημεία απέχουν το ίδιο από τον άξονα συμμετρίας.

β. Βρίσκουμε την απόσταση του σημείου Α από τον άξονα συμμετρίας. Το συμμετρικό του σημείο Ε βρίσκεται σε ίση απόσταση από τον άξονα συμμετρίας.

- Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τα σημεία Ζ, Η, Θ.

γ. Ενώνουμε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ και σχεδιάζουμε το σχήμα ΕΖΗΘ που είναι συμμετρικό του ΑΒΓΔ ως προς την κόκκινη ευθεία, που είναι ο άξονας συμμετρίας.

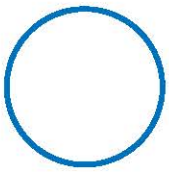


Αναστοχασμός

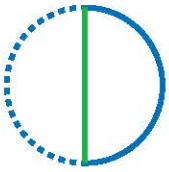
1. Ποια κορυφή ισοσκελούς τριγώνου βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του;
2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να έχει άξονα συμμετρίας;
3. Οι άξονες συμμετρίας ενός ισόπλευρου τριγώνου, τι άλλο είναι στο τρίγωνο;

Διερεύνηση

1. Γνωρίζουμε το σχήμα του κύκλου:

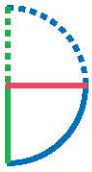


1. Κόβουμε προσεχτικά τον μπλε κύκλο από το παράρτημα.



2. Διπλώνουμε το χαρτί σε δύο ίσα μέρη. Ζωγραφίζουμε πράσινη τη γραμμή δίπλωσής του.

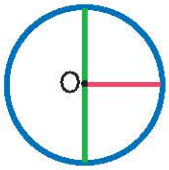
3. Διπλώνουμε και πάλι το χαρτί, ώστε να σχηματιστούν τέσσερα ίσα μέρη. Ζωγραφίζουμε κόκκινη τη δεύτερη γραμμή δίπλωσής του.



4. Ζωγραφίζουμε μαύρο το σημείο Ο στο οποίο τέμνονται οι γραμμές δίπλωσης.

α. Ονομάζουμε την πράσινη και την κόκκινη γραμμή και το σημείο Ο.

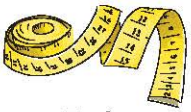
πράσινη: ..... κόκκινη: ..... σημείο Ο: .....



β. Παρατηρώντας το σχήμα του κύκλου, συμπληρώνουμε τις προτάσεις.

- Η ..... είναι διπλάσια της .....
- Η μέτρηση της ..... γραμμής μας δίνει το μήκος του κύκλου.

2. Εντοπίζουμε το σχήμα του κύκλου σε αντικείμενα της τάξης μας και:



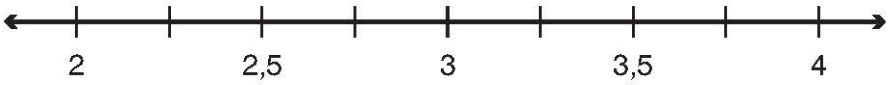
μεζούρα

α. Με μια μεζούρα ή με ένα κομμάτι σπάγκου και χάρακα μετράμε το μήκος κύκλου και τη διάμετρο του κάθε αντικειμένου.

β. Συμπληρώνουμε τον πίνακα και υπολογίζουμε με την αριθμομηχανή.

Αντικείμενα	μήκος κύκλου (σε εκ.)	διάμετρος (σε εκ.)	μήκος κύκλου: διάμετρος (σε εκ.)
χάρτινος κύκλος			
χείλος ποτηριού	24,7	7,8	3,17

γ. Τοποθετούμε το αποτέλεσμα κάθε διαίρεσης στην αριθμογραμμή:



Συζητάμε στην τάξη ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκονται τα αποτελέσματα των διαιρέσεών μας.

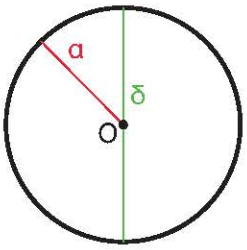
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Τα κύρια στοιχεία του κύκλου είναι:
το **κέντρο** Ο, η **ακτίνα** α και η **διάμετρος** δ.

Για να υπολογίσουμε το μήκος κύκλου, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό **π** με τη διάμετρο του κύκλου.
μήκος κύκλου =π x δ=3,14 x δ

Ο αριθμός που συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα **π** είναι με προσέγγιση εκατοστού **3,14**.

Παραδείγματα

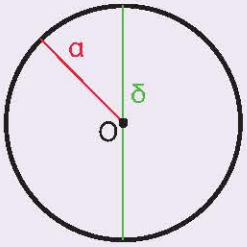


Η διάμετρος του κύκλου είναι 3 εκ.

Επομένως: μήκος κύκλου =
π x δ=3,14 x 3=9,42 εκ.

Ιστορικό σημείωμα
Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, το πηλίκο της διαίρεσης του μήκους οποιουδήποτε κύκλου με τη διάμετρό του προσεγγίζεται όλο και με μεγαλύτερη ακρίβεια και είναι ο αριθμός 3,14159265... που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.
Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται σε όλον τον κόσμο με το ελληνικό γράμμα **π** και στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική του τιμή **3,14**.

Εφαρμογή



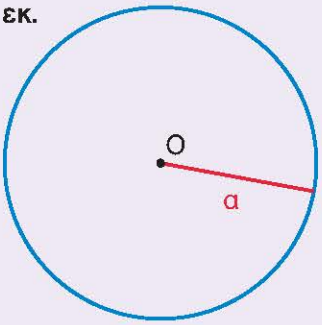
1. Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου ακτίνας 3 εκ.

Το μήκος του κύκλου είναι: μήκος κύκλου =3,14 x δ

Επειδή η διάμετρος ενός κύκλου είναι διπλάσια της ακτίνας, έχουμε:

μήκος κύκλου = 3,14 x 2 x ..... = 3,14 x ..... =..... εκ.

2. Να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου που το μήκος του είναι 15,7 εκ.



Το μήκος του κύκλου είναι: μήκος κύκλου =3,14 x δ

Αφού το μήκος του κύκλου είναι 15,7, έχουμε:

δ = 15,7: 3,14 άρα : δ = ...

Για να βρούμε την ακτίνα, θα διαιρέσουμε τη διάμετρο διά δύο.

Άρα α= ..... : .....=..... εκ.

Αναστοχασμός

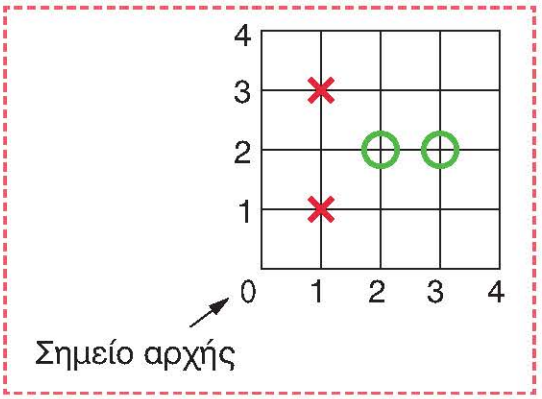
1. Δύο κύκλοι με διαφορετικό μέγεθος ακτίνας μπορεί να έχουν το ίδιο μήκος κύκλου; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.
2. Η Αγγελική υποστηρίζει ότι ο αριθμός π είναι 3,14 εκ. Έχει δίκιο ή όχι και γιατί;
3. Πόσες ακτίνες και πόσες διαμέτρους έχει ένας κύκλος;

Στα κεφάλαια αυτά έμαθα:

- ✓ **να αναγνωρίζω και να περιγράφω τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση ενός σχεδίου ή μιας εικόνας σε διάφορες κλίμακες,**
- ✓ **να περιγράφω τοποθεσίες και διαδρομές σε απλούς χάρτες,**
- ✓ **να διακρίνω τα είδη των γωνιών,**
- ✓ **να συγκρίνω και να σχηματίζω γωνίες,**
- ✓ **να διακρίνω τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές,**
- ✓ **να χαράζω γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων,**
- ✓ **να χαράζω τα ύψη ενός τριγώνου,**
- ✓ **να υπολογίζω το μήκος ενός κύκλου,**
- ✓ **να αναγνωρίζω συμμετρικά σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας,**
- ✓ **να εντοπίζω τους άξονες συμμετρίας,**
- ✓ **να κατασκευάζω το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί.**

1ο Πρόβλημα

Η Δανάη με τον Αντρέι παίζουν το παιχνίδι που τους έμαθε η Αγγελική. Ο παίκτης ή η παίκτρια που θα συμπληρώσει 4 **X** ή 4 **O** στην ίδια γραμμή ή στην ίδια στήλη κερδίζει. Η Δανάη έχει το **X** και ο Αντρέι το **O**.



α. Η Δανάη βάζει **X** στο σημείο: 1 μπροστά και 3 επάνω, δηλαδή στο σημείο (.... , ...).

β. Ο Αντρέι βάζει **O** στο σημείο: 3 μπροστά και 2 επάνω, δηλαδή στο σημείο (..... , ...).

- Καταγράφουμε τις επόμενες κινήσεις των παιδιών.

γ. Η Δανάη βάζει **X** στο σημείο: ..... , δηλαδή στο σημείο (..... , ...).

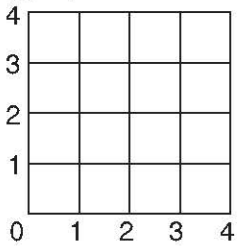
δ. Ο Αντρέι βάζει **O** στο σημείο: ..... , δηλαδή στο σημείο (..... , ...).

- Πού είναι καλύτερα να βάλει **X** η Δανάη τώρα; Δικαιολογούμε την επιλογή μας.

  .....

  .....

- Παίζουμε με έναν συμμαθητή μας ή με μια συμμαθήτριά μας το ίδιο παιχνίδι. Για κάθε κίνηση που κάνουμε προσδιορίζουμε το σημείο.



2ο Πρόβλημα

Σε έναν χάρτη της Ελλάδας, με τη βοήθεια της κλίμακας στην οποία είναι σχεδιασμένος, υπολογίζουμε σε χιλιόμετρα την πραγματική απόσταση σε ευθεία γραμμή Θεσσαλονίκη – Κομοτηνή.

3ο Πρόβλημα

Σχεδιάζουμε με το μοιρογνωμόνιο τις παρακάτω γωνίες. Τις ονομάζουμε με μικρά γράμματα της αλφαβήτας και γράφουμε από κάτω το είδος της κάθε γωνίας.

γωνία 30°	γωνία 100°	γωνία 90°	γωνία 180°
			
.....	.....	.....	.....

4ο Πρόβλημα

Σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο, ένα ισοσκελές και ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο.

5ο Πρόβλημα

Σχεδιάζουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας την κόκκινη ευθεία.