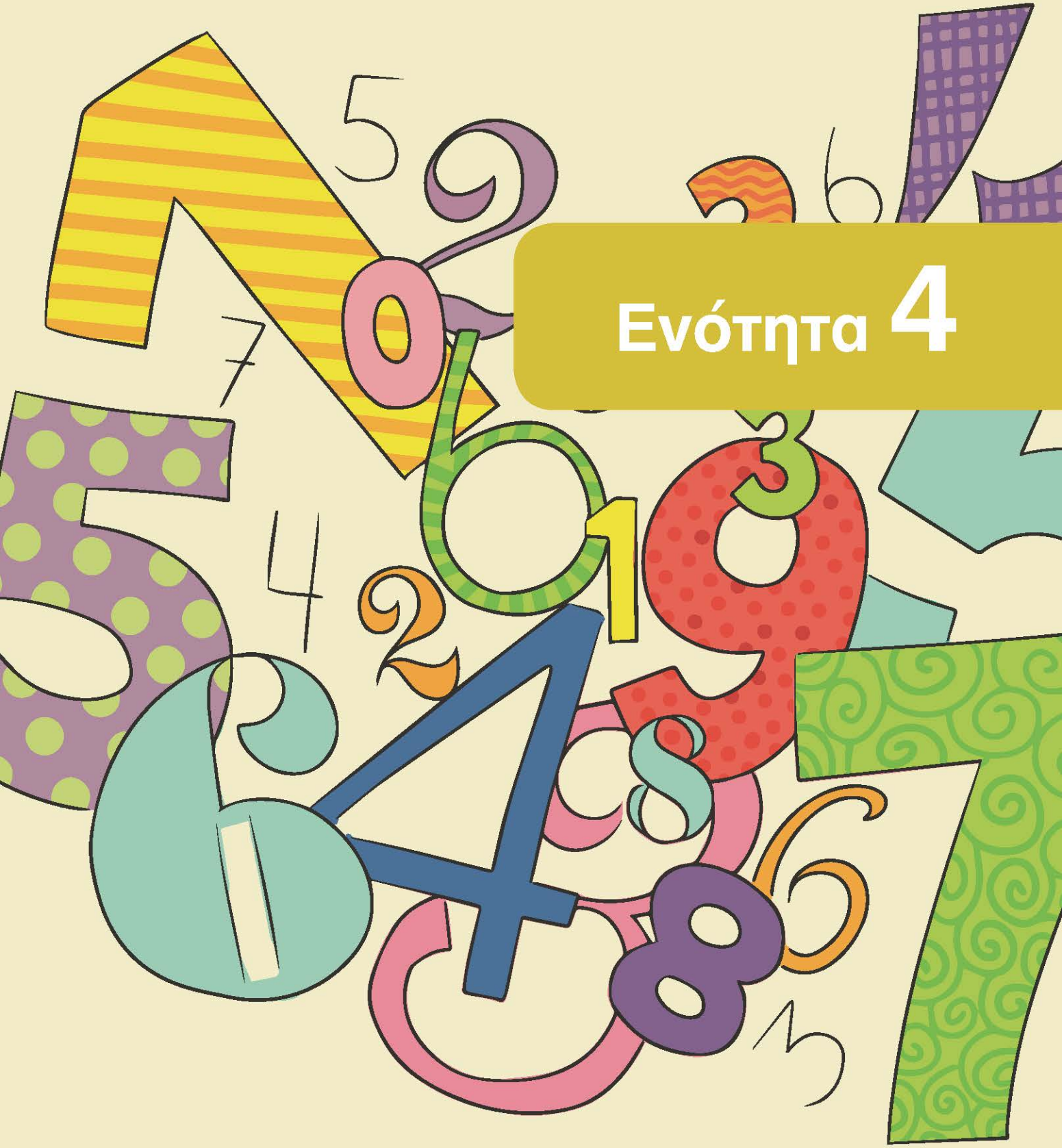


Ενότητα 4

Διερεύνηση

Τα παιδιά της Ε΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου στην Αθήνα έκαναν μια έρευνα, στην οποία κατέγραψαν τις ώρες παιχνιδιού και ξεκούρασης που έχουν συνολικά τις καθημερινές της εβδομάδας.

Κάνουμε στην τάξη μας μια αντίστοιχη έρευνα και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

Ε΄ τάξη σχολείου της Αθήνας							
Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας							
4	5	10	10	5	15	5	10
5	10	6	15	5	5	5	5
5	5	9	7	14	5	6	11

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΩΡΑ

Η τάξη μας							
Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας							

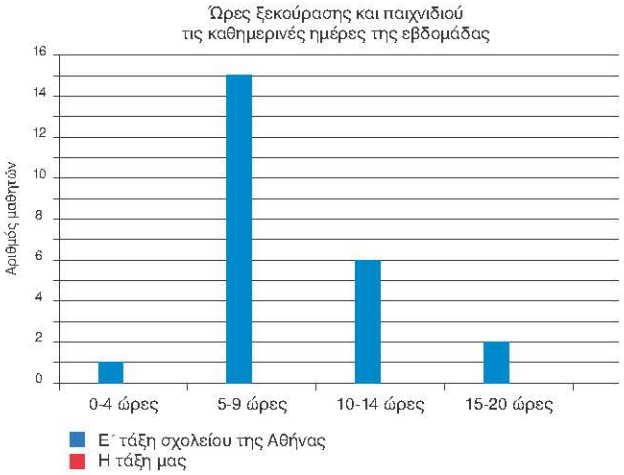
1. Συμπληρώνουμε τον πίνακα.

Κάθε αριθμός αντιπροσωπεύει την απάντηση ενός συμμαθητή μας ή μιας συμμαθήτριάς μας.

2. Οργανώνουμε τα δεδομένα μας συμπληρώνοντας τους πίνακες συχνοτήτων.

Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές	Ε΄ τάξη σχολείου της Αθήνας		Η τάξη μας	
	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό
0 – 4 ώρες		1		
5 – 9 ώρες	卌 卌 卌			
10 – 14 ώρες		6		
15 – 20 ώρες				
άλλο				

3. Αναπαριστάνουμε τα δεδομένα σε διπλό ραβδόγραμμα.



Με κόκκινο χρώμα φτιάχνουμε τις ράβδους του σχολείου μας δίπλα από τις ράβδους του σχολείου της Αθήνας.

- Πόσα παιδιά έλαβαν μέρος σε κάθε έρευνα;
- Τι δείχνει το ύψος των ράβδων;
- Πόσες ώρες για ξεκούραση έχουν τα περισσότερα παιδιά του σχολείου μας τις καθημερινές;

Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο ερευνών.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Η συλλογή, η οργάνωση, η επεξεργασία, η αναπαράσταση και η ερμηνεία ενός συνόλου **αριθμητικών δεδομένων** μάς βοηθά να βγάζουμε συμπεράσματα, να κάνουμε προβλέψεις και να παίρνουμε αποφάσεις.

Η **συλλογή** δεδομένων γίνεται με μετρήσεις, πειράματα, έρευνες κ.λπ., ενώ η **οργάνωση** και η **αναπαράσταση** τους με πίνακες και διαγράμματα.

Ο **πίνακας συχνοτήτων** μάς δείχνει πόσο συχνά εμφανίζεται κάθε δεδομένο στην καταγραφή μας.

Υπάρχουν πολλοί **τύποι διαγραμμάτων** για την αναπαράσταση των δεδομένων:
π.χ. ραβδόγραμμα, εικονόγραμμα, σημειόγραμμα, διάγραμμα γραμμής.

Παραδείγματα

α. Σε πόσο χρόνο τρέχεις τα 100 μέτρα;

Σε πόσα δευτερόλεπτα τρέχεις τα 100 μέτρα;							
14,8	14,9	15,3	15,7	15,5	16	15,2	15,2
16,1	15,6	15,5	14,8	15,3	14,9	17	15,1
15,3	15,6	14,8	16,2	15,6	15,2	15,5	15,3

Πίνακας συχνοτήτων

Πόσες ταινίες είδαν οι μαθητές τον τελευταίο μήνα		
Ταινίες	**Καταμέτρηση με γραμμές**	**Συχνότητα**
0	IIII	4
1	卌 IIII	9
2	IIII	4

Εικονόγραμμα

0 ταινίες	○ ○
1 ταινία	○ ○ ○ ○
2 ταινίες	○ ○
Κάθε ○ αντιστοιχεί σε 2 μαθητές	

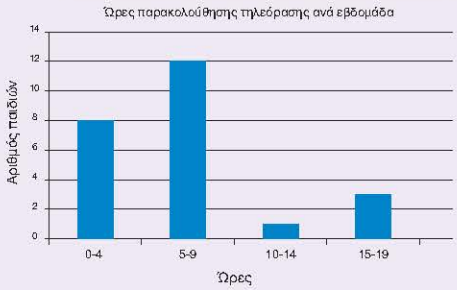
Εφαρμογή Πίνακας συχνοτήτων - ραβδόγραμμα

Τα παιδιά μιας Ε΄ τάξης ερεύνησαν πόσες ώρες παρακολουθούν τηλεόραση κάθε εβδομάδα.

Αποτελέσματα έρευνας														
0	5	7	9	8	2	2	15	5	16	5	8	0	3	9
1	7	15	9	13	4	8	4	8						

1. **Οργανώνουμε** τα δεδομένα που **συλλέξαμε** στον πίνακα συχνοτήτων, στον οποίο **καταμετρούμε** πόσες φορές εμφανίζεται κάθε δεδομένο. Επειδή στα δεδομένα εμφανίζονται πολλές διαφορετικές τιμές, τα ομαδοποιούμε: 0-4, 5-9, 10-14 και 15-19 ώρες.
2. **Παρουσιάζουμε** τα δεδομένα με ένα ραβδόγραμμα, στο οποίο βάζουμε τίτλο. Κάθε άξονας χωρίζεται σε ίσα διαστήματα.

Ώρες	Καταμέτρηση	Συχνότητα
0 - 4	卌 III	8
5 - 9	卌 卌 II	12
10 - 14	I	1
15 - 19	III	3

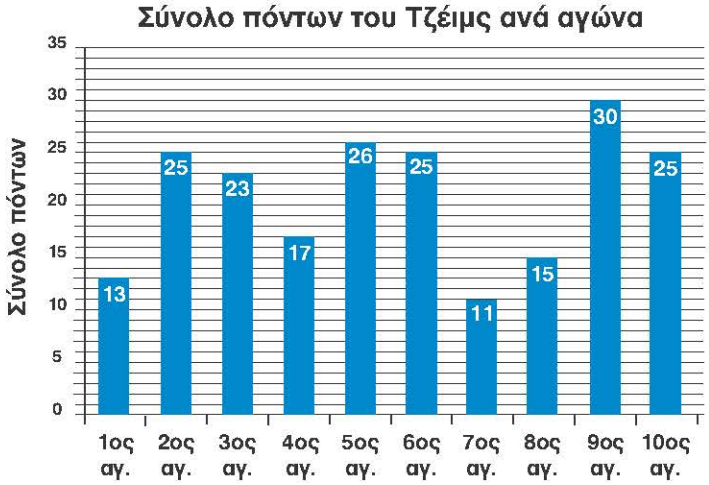


Αναστοχασμός

1. Στην αναπαράσταση των δεδομένων κάποιοι αριθμοί δείχνουν τις τιμές των δεδομένων και κάποιοι άλλοι πόσο συχνά εμφανίζεται κάθε τιμή. Δίνουμε ένα παράδειγμα.

Διερεύνηση

Ο Τζέιμς σημείωσε στους δέκα πρώτους αγώνες μπάσκετ της ομάδας του τους πόντους που φαίνονται στο ραβδόγραμμα:



α. Παρατηρούμε το ραβδόγραμμα:

1. Πόσους πόντους σημείωσε συνολικά και στους δέκα αγώνες;

   .....

2. Αν οι συνολικοί πόντοι μοιράζονταν εξίσου και στους 10 αγώνες, πόσους πόντους θα σημείωνε σε κάθε αγώνα;

   .....

   .....

3. Χαράζουμε μια κόκκινη γραμμή παράλληλη στον οριζόντιο άξονα, που θα δείχνει το ύψος των ράβδων, εάν οι συνολικοί πόντοι μοιράζονταν εξίσου και στους 10 αγώνες.

β. Συμπληρώνουμε τον ακόλουθο πίνακα συχνοτήτων.

Σύνολο διαφορετικών πόντων ανά αγώνα	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης
13		1

1 Ποια είναι η μικρότερη τιμή πόντων; .....
2. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή πόντων; .....
3. Ποια τιμή πόντων εμφανίζεται πιο συχνά; .....

γ. Διατάσσουμε τους πόντους με τη σειρά από τους λιγότερους, ανά αγώνα, στους περισσότερους.

.....

Ποια τιμή ή ποιες δύο τιμές βρίσκονται στη μέση της διάταξης και χωρίζουν το σύνολο των τιμών σε δυο ίσα μέρη, από τα οποία το ένα μέρος έχει τις μικρότερες τιμές και το άλλο τις μεγαλύτερες;

.....

Συζητάμε και κάνουμε προβλέψεις για το μέλλον του παίκτη.

- Με βάση τα δεδομένα, ποια πρόβλεψη μπορούμε να κάνουμε για την πορεία του παίκτη στη διάρκεια της αγωνιστικής περιόδου;
- Ποιοι πιθανοί παράγοντες μπορούν να ανατρέψουν τις προβλέψεις μας;

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

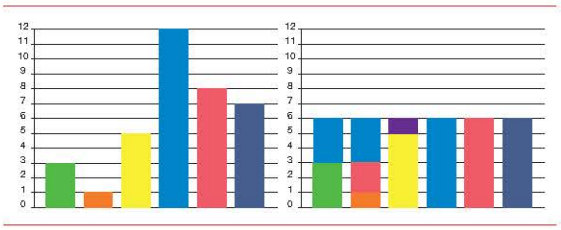
Κατά την επεξεργασία των αριθμητικών δεδομένων, βρίσκουμε κάποιες χαρακτηριστικές τιμές, χρήσιμες στην ερμηνεία των δεδομένων.
Μία από αυτές είναι η μέση τιμή ή μέσος όρος.

Για να υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** ή τον **μέσο όρο**, προσθέτουμε τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος των δεδομένων.

$$\textbf{Μέση τιμή ή μέσος όρος} = \frac{\textbf{άθροισμα δεδομένων}}{\textbf{πλήθος δεδομένων}}$$

Παραδείγματα

Οι μετρήσεις της θερμοκρασίας στη Λαμία κάθε 4 ώρες στις 25/12/2017 ήταν: 3 °C, 1 °C, 5 °C, 12 °C, 8 °C, 7 °C.



Μέση τιμή ή μέσος όρος

$$\frac{3+1+5+12+8+7}{6} = \frac{36}{6} = 6\ ^{o}C.$$

Εφαρμογή Υπολογίζω τη μέση τιμή

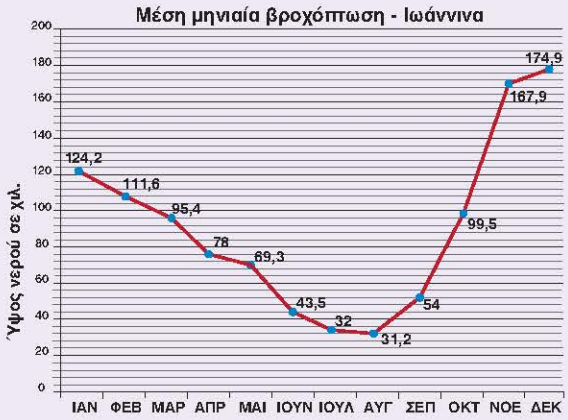
Σύμφωνα με το Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών, η μέση μηνιαία βροχόπτωση στην Αθήνα τον περασμένο αιώνα ήταν 33,29 χιλιοστά. Συγκρίνουμε τη μέση μηνιαία βροχόπτωση της Αθήνας με αυτήν της πόλης των Ιωαννίνων την ίδια περίοδο.
Παρατηρούμε και σχολιάζουμε το διάγραμμα.

1. Άθροισμα των δεδομένων:
   124,2 +111,6 + 95,4 + 78 + 69,3 + 43,5 + 32 + 31,2 + 54 + 99,5 + 167,9 + 174,9 = 1081,5.
2. Πλήθος των δεδομένων: 12.
3. Άρα η μέση τιμή είναι:

$$\frac{1081,5}{12} = 1081,5 : 12 = 90,125 \text{ χιλ.}$$

Παρατηρούμε ότι η μέση μηνιαία βροχόπτωση στα Ιωάννινα είναι σχεδόν τριπλάσια από αυτήν της Αθήνας.

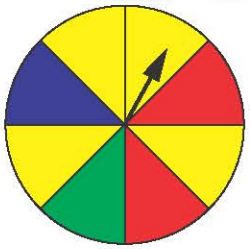
Η μέση τιμή της βροχόπτωσης το καλοκαίρι στα Ιωάννινα είναι περίπου όση είναι η μέση μηνιαία τιμή όλου του έτους για την Αθήνα.



Αναστοχασμός

1. Η μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων είναι πάντα η τιμή ενός από τα δεδομένα;
2. Αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή του ύψους 180 αγοριών Ε΄ δημοτικού, μπορούμε να εκτιμήσουμε το ύψος που έχουν όλα τα αγόρια στην ηλικία αυτή;
3. Αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή της θερμοκρασίας ενός τόπου σε χρονικό διάστημα 7 ημερών, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή της θερμοκρασίας του ίδιου τόπου και για τις επόμενες 7 ημέρες; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.

Διερεύνηση



Παίζουμε ένα παιχνίδι στο οποίο κερδίζει μόνον όποιος φέρει στον διπλανό τροχό το χρώμα που έχει επιλέξει. Ποιο χρώμα θα διάλεγες για εσένα;

α. Κάνουμε προβλέψεις για το πείραμα τύχης.

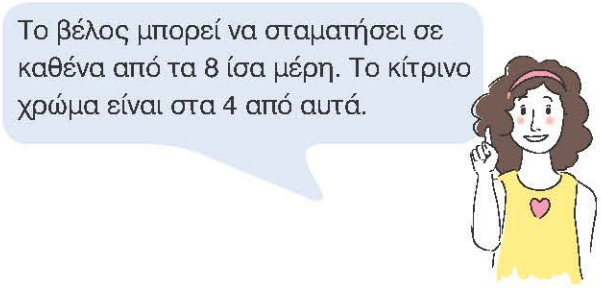
Συζητάμε πόσο πιθανό είναι να έρθει καθένα από τα χρώματα, αν περιστρέψουμε τον τροχό.

β. Κάνουμε το πείραμα τύχης.
Χωριζόμαστε σε ομάδες και χρησιμοποιούμε τον τροχό από το παράρτημα. Περιστρέφουμε τον τροχό 20 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματά μας.

1. Παρατηρούμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε χρώματος. Ποιο χρώμα είναι πιο πιθανόν να εμφανίζεται κάθε φορά;

   .....

Αποτελέσματα της ομάδας μου		
Χρώμα	**Καταμέτρηση με γραμμές**	**Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό**
πράσινο		
κίτρινο		
μπλε		
κόκκινο		



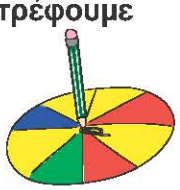
2. Πόσες φορές αναμένουμε να εμφανιστεί κόκκινο χρώμα σε 8 περιστροφές του τροχού;

   .....

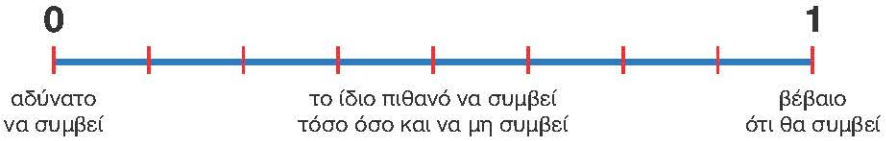
3. Πόσες φορές αναμένουμε να εμφανιστεί πράσινο χρώμα σε 8 περιστροφές του τροχού;

   .....

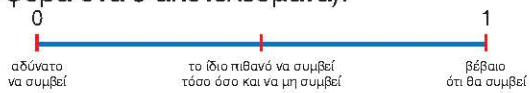
γ. Γράφουμε με κλάσμα την πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος, όταν περιστρέφουμε τον τροχό.
Πιθανότητα να έρθει: κίτρινο = $\frac{\square}{\square}$, κόκκινο = $\frac{\square}{\square}$, μπλε = $\frac{\square}{\square}$, πράσινο = $\frac{\square}{\square}$



δ. Τοποθετούμε τα κλάσματα στην παρακάτω κλίμακα.



Συγκρίνουμε τις πιθανότητες που υπολογίσαμε, με τον τρόπο αυτό, με τις αρχικές μας προβλέψεις.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Ένα πείραμα που δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του, όταν το κάνουμε, ονομάζεται **πείραμα τύχης.**	Αν ρίξουμε ένα ζάρι 1000 φορές, δεν μπορούμε να προβλέψουμε πόσες φορές θα εμφανιστεί κάθε αριθμός.
Σε ένα πείραμα τύχης, το πόσο πιθανό είναι να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα λέγεται **πιθανότητα** και μπορεί να υπολογιστεί με ένα κλάσμα: $\textbf{πιθανότητα} = \dfrac{\textbf{πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\textbf{πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων}}$	Η πιθανότητα να έρθει 3, αν ρίξουμε ένα ζάρι είναι: $\dfrac{\textit{πόσες φορές το 3 στο ζάρι}}{\textit{πλήθος των αριθμών στο ζάρι}} = \dfrac{1}{6}.$
Η πιθανότητα να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί με μια κλίμακα που εκτείνεται από το **αδύνατο να συμβεί** έως το **βέβαιο ότι θα συμβεί.** Η μέση της κλίμακας αντιπροσωπεύει αυτό που είναι **πιθανό τόσο να συμβεί, όσο και να μην συμβεί.**	Όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6). Το πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων είναι 1 (το 3 εμφανίζεται μία φορά στα 6 αποτελέσματα). 

Εφαρμογή Εκφράζω την πιθανότητα με κλάσμα

Μέσα σε μια τσάντα βρίσκονται ανακατεμένες ομοιόμορφες μπάλες. Οι 5 είναι κόκκινες, οι 2 κίτρινες και 3 είναι μπλε.
α. Υπολογίζουμε την πιθανότητα να τραβήξουμε:

1. μια κίτρινη μπάλα: $\dfrac{\textit{πλήθος από κίτρινες μπάλες}}{\textit{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{2}{10}$

2. μια κόκκινη μπάλα: $\dfrac{\textit{πλήθος από κόκκινες μπάλες}}{\textit{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ (μισές – μισές πιθανότητες).

3. μια πράσινη μπάλα: $\dfrac{\textit{πλήθος από πράσινες μπάλες}}{\textit{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{0}{10} = 0.$ Η πιθανότητα είναι 0, δηλαδή είναι αδύνατο να συμβεί, γιατί δεν υπάρχει πράσινη μπάλα.

4. μια κόκκινη ή κίτρινη ή μπλε μπάλα:

$$\frac{\textit{πλήθος από κόκκινες και κίτρινες και μπλε μπάλες}}{\textit{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \frac{(5+2+3)}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

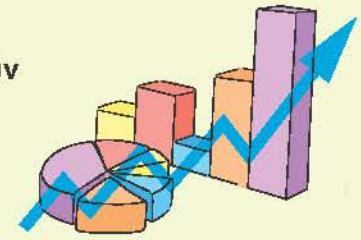
Η πιθανότητα είναι 1, δηλαδή είναι βέβαιο ότι θα συμβεί, γιατί οι μπάλες στην τσάντα είναι μόνο κόκκινες, κίτρινες και μπλε.

β. Τοποθετούμε τις παραπάνω πιθανότητες στην παρακάτω αριθμογραμμή.

Αναστοχασμός

1. Ο Νίκος ισχυρίζεται ότι σε ένα παιχνίδι τύχης με αριθμούς από το 1 έως το 20, το 17 είναι πιο πιθανό να εμφανιστεί, επειδή είναι ο τυχερός του αριθμός. Έχει δίκιο;
2. Ρίχνουμε ένα ζάρι 10.000 φορές. Πόσες περίπου φορές θα έρθει ο αριθμός 2;

Στα κεφάλαια αυτά έμαθα:



- ✓ **να διατυπώνω ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα,**
- ✓ **να συλλέγω δεδομένα μέσω ερευνών, μετρήσεων ή πειραμάτων,**
- ✓ **να οργανώνω τα δεδομένα σε πίνακες,**
- ✓ **να αναπαριστάνω τα δεδομένα σε διαγράμματα,**
- ✓ **να εξηγώ ένα διάγραμμα και να επιχειρηματολογώ με βάση τα δεδομένα,**
- ✓ **να βρίσκω τη μέση τιμή,**
- ✓ **να διατυπώνω προβλέψεις και να καταγράφω τη συχνότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος κατά την επανάληψη ενός πειράματος τύχης,**
- ✓ **να υπολογίζω την πιθανότητα ενός αποτελέσματος με κλάσμα.**

1ο Πρόβλημα

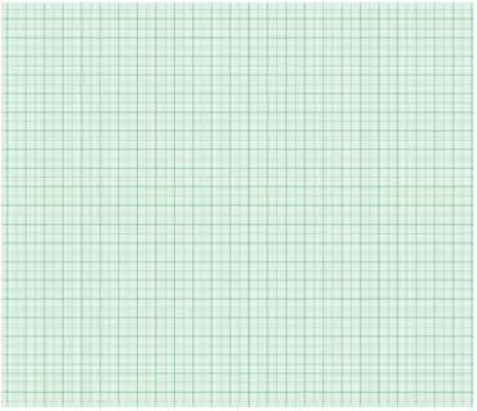
Τα παιδιά της Ε΄ και της ΣΤ΄ τάξης έκαναν μια έρευνα για το ποιο άθλημα τους αρέσει πιο πολύ. Κάθε παιδί διάλεξε μόνο ένα άθλημα. Συμβουλευόμαστε τον πίνακα των δεδομένων και οργανώνουμε τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων. Αναπαριστάνουμε τα δεδομένα σε ένα ραβδόγραμμα.

Αγαπημένο άθλημα									
Π	Π	Π	Σ	Μ	Μ	Β	Μ	Σ	Π
Β	Σ	Σ	Μ	Κ	Κ	Σ	ΠΠ	Μ	Β
Π	Κ	Σ	Β	Β	Σ	Β	Μ	Π	Π
Ποδόσφαιρο: Π, Μπάσκετ: Μ, Βόλεϊ: Β, Κολύμβηση: Κ, Πινγκ Πονγκ: ΠΠ, Στίβος: Σ									

1. Πίνακας συχνοτήτων

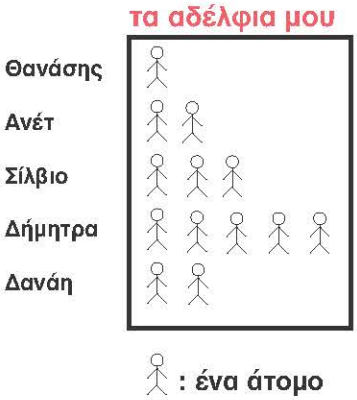
Άθλημα	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό
Ποδόσφαιρο		
Μπάσκετ		
Βόλεϊ		
Κολύμβηση		
Πινγκ Πονγκ		
Στίβος		

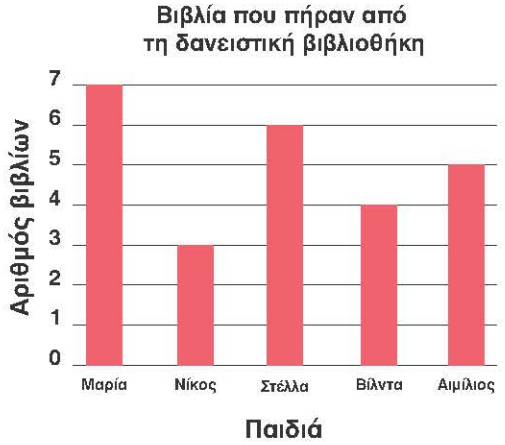
2. Ραβδόγραμμα



2ο Πρόβλημα

Βρίσκουμε τη μέση τιμή των δεδομένων που παρουσιάζονται σε κάθε διάγραμμα.





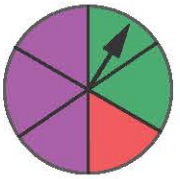
3ο Πρόβλημα

Χρησιμοποιούμε την παρακάτω κλίμακα, για να εκφράσουμε πόσο πιθανό είναι να προκύψουν τα ακόλουθα χρώματα, αν περιστρέψουμε τον τροχό.

α. Μοβ: .....

β. Κίτρινο: ....., **γ.** Ποτέ πράσινο: .....

δ. Κόκκινο ή πράσινο ή μοβ: .....



4ο Πρόβλημα

Μέσα σε ένα μαύρο κουτί έχουμε 1 κόκκινη, 1 πράσινη και 1 άσπρη μπάλα. Τραβάμε μία μπάλα, καταγράφουμε το αποτέλεσμα στον πίνακα συχνοτήτων και τοποθετούμε ξανά την μπάλα στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα τύχης συνολικά 30 φορές.

1. Πριν ξεκινήσουμε το πείραμα, προβλέπουμε πόσες φορές θα τραβήξουμε μια άσπρη μπάλα.
   .....
2. Κάνουμε το πείραμα και αναπαριστάνουμε τα αποτελέσματα του πειράματος σε εικονόγραμμα και ραβδόγραμμα.
3. Συγκρίνουμε την πρόβλεψή μας με τα αποτελέσματα του πειράματος τύχης.

	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης
κόκκινες μπάλες		
άσπρες μπάλες		
πράσινες μπάλες		

Ραβδόγραμμα

Εικονόγραμμα