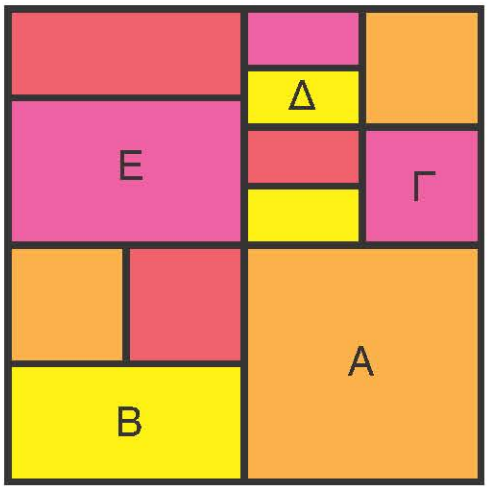
Ενότητα 3

Διερεύνηση

1. Τα παιδιά της τάξης ύστερα από επίσκεψή τους σε ένα μουσείο με έργα του Ολλανδού ζωγράφου Μοντριάν, δημιούργησαν τους δικούς τους πίνακες. Ένας από αυτούς είναι και ο παρακάτω.

Κόβουμε τα κομμάτια του πίνακα από το παράρτημα και με τη βοήθεια τους υπολογίζουμε.



Γράφουμε με αριθμό το μέρος του πίνακα που καλύπτουν τα γεωμετρικά σχήματα:

Α =

Β =

Γ =

Δ =

Ε =

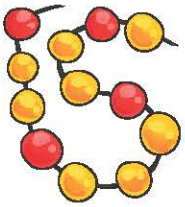
Συζητάμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε το μέρος που καλύπτει το σχήμα Ε.

2. Η Δανάη διάλεξε τις χάντρες της εικόνας, για να φτιάξει ένα βραχιόλι.

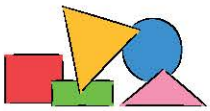
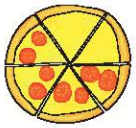
Γράφουμε με αριθμό το μέρος από τις συνολικές χάντρες που είναι:

α. κίτρινες: .....

β. κόκκινες: .....



Συζητάμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να εκφράσουμε το μέρος των κίτρινων και κόκκινων χαντρών.

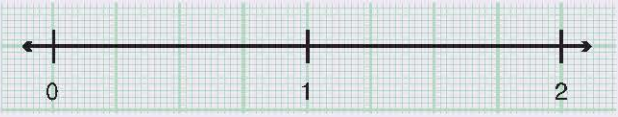
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Κάθε **κλάσμα** είναι ένας αριθμός. Σχηματίζεται από τον **αριθμητή** και τον **παρονομαστή,** που λέγονται όροι του κλάσματος και χωρίζονται με τη **γραμμή κλάσματος.**	$\frac{3}{4}$ αριθμητής, γραμμή κλάσματος, παρανομαστής — όροι του κλάσματος **Διαβάζουμε:** τρία τέταρτα
Ένα **κλάσμα** μπορεί να εκφράζει μια ποσότητα από κάτι ολόκληρο, **το μέρος ενός όλου**. Το ολόκληρο ή όλο το λέμε **ακέραιη μονάδα.**	 Τα $\frac{2}{5}$ από το σύνολο των γεωμετρικών σχημάτων είναι τρίγωνα.
Όταν το κλάσμα δείχνει **το μέρος ενός όλου** τότε: • ο παρονομαστής δείχνει **σε πόσα ίσα μέρη χωρίζουμε** το όλο. • Ο αριθμητής δείχνει **πόσα από αυτά τα ίσα μέρη παίρνουμε.**	 **Μέρος του όλου** Τα $\frac{4}{6}$ της πίτσας έχουν ντομάτα **Παρονομαστής:** 6, σε τόσα ίσα κομμάτια χωρίζουμε **Αριθμητής:** 4, τόσα κομμάτια έχουν ντομάτα
Όταν ο **παρονομαστής** είναι **ίσος** με τον **αριθμητή,** το κλάσμα είναι ίσο με την ακέραιη μονάδα.	$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\cdots=\frac{15}{15}=\cdots=1$

Εφαρμογή Κλάσματα στην αριθμογραμμή

Να τοποθετήσετε πάνω στην αριθμογραμμή τα κλάσματα: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{4}$

1ο βήμα: Χωρίζουμε κάθε μονάδα στην αριθμογραμμή σε .....

.....



.....

2ο βήμα: Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή την κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$.

3ο βήμα: Για να τοποθετήσουμε το κλάσμα $\frac{3}{4}$, επαναλαμβάνουμε 3 φορές την κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$. Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{3}{4}$.

4ο βήμα: Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{4}{4}$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{4}{4}$ = ...

Αναστοχασμός

1. Γράφουμε με κλάσμα το μέρος των παιδιών της τάξης μας που έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό:

   .....
2. Βρίσκουμε κλάσματα μικρότερα, ίσα και μεγαλύτερα της μονάδας.
3. Δημιουργούμε μία έντυπη ή ψηφιακή αφίσα και καταγράφουμε σε αυτήν τρεις εκφράσεις από την καθημερινή μας ζωή στις οποίες χρησιμοποιούμε κλάσματα. Σχεδιάζουμε εικόνες, για να αναπαραστήσουμε τα κλάσματα αυτά.

Διερεύνηση

Η Δανάη, η Αγγελική και ο Αντρέι φτιάχνουν προσκλήσεις για τη γιορτή του σχολείου τους.

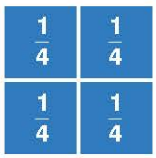
α΄ τρόπος: Σχεδιάζουμε τα κομμάτια από τα χαρτόνια που έχουν τα κορίτσια.
Γράφουμε κάτω από κάθε κομμάτι το κλάσμα που εκφράζει το μέρος του χαρτονιού.

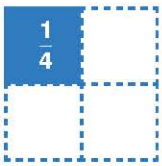
Γράφουμε με κλάσμα το μέρος από το χαρτόνι που έχουν συνολικά τα κορίτσια: $\frac{\square}{\square}$

Παρατηρούμε ότι στο κλάσμα αυτό ο αριθμητής είναι ..... από τον παρονομαστή.

β΄ τρόπος: Σχεδιάζουμε τα κομμάτια και γράφουμε με κλάσματα το χαρτόνι που έχουν τα κορίτσια, σχηματίζοντας:

τα ολόκληρα χαρτόνια και τα μέρη του χαρτονιού που έμειναν.





$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = 1 + \frac{\square}{\square} = 1\frac{\square}{\square}$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\square}{\square} = 1\frac{\square}{\square}$

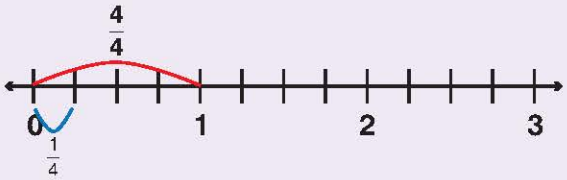
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Τα **κλάσματα** στα οποία ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή είναι **μεγαλύτερα από τον αριθμό 1.**	$\frac{5}{3} > 1$
Τα κλάσματα αυτά μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε **μεικτούς αριθμούς** γράφοντας χωριστά τις ακέραιες μονάδες τους.	$\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ **(μεικτός)**

Εφαρμογή Μετατροπή ενός κλάσματος σε μεικτό αριθμό και αντίστροφα

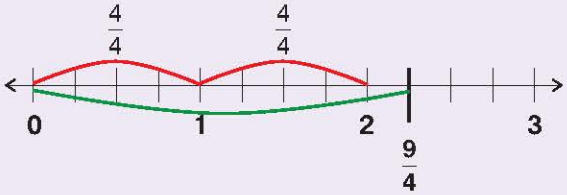
1. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{9}{4}$ σε μεικτό αριθμό.

1. Ο παρονομαστής δείχνει ότι χωρίζουμε την ακέραιη μονάδα σε ..... ίσα μέρη.

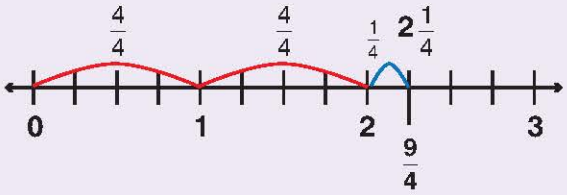
   Το κάθε μέρος της είναι το $\frac{\square}{\square}$.



2. Ο αριθμητής δείχνει ότι παίρνουμε ..... ίσα μέρη.
   Πρέπει να χωρίσουμε και άλλες ακέραιες μονάδες.



3. Συνολικά παίρνουμε 2 ακέραιες μονάδες και το $\frac{1}{4}$ της επόμενης.



Άρα: $\frac{9}{4} = \_ + \_ + \_ = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

2. Να μετατρέψετε τον μεικτό αριθμό $2\frac{1}{4}$ σε κλάσμα.

Ο παρονομαστής δείχνει ότι χωρίζουμε την ακέραιη μονάδα σε ..... ίσα μέρη.

Η ακέραιη μονάδα είναι ίση με $\frac{\square}{\square}$.

Άρα: $2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \_ + \_ + \_ = \frac{9}{4}$

Αναστοχασμός

Αν το κλάσμα $\frac{α}{3}$ είναι μεγαλύτερο της ακέραιης μονάδας, ποιος αριθμός μπορεί να είναι το α;

Τι συμπεραίνουμε; . .....

Διερεύνηση

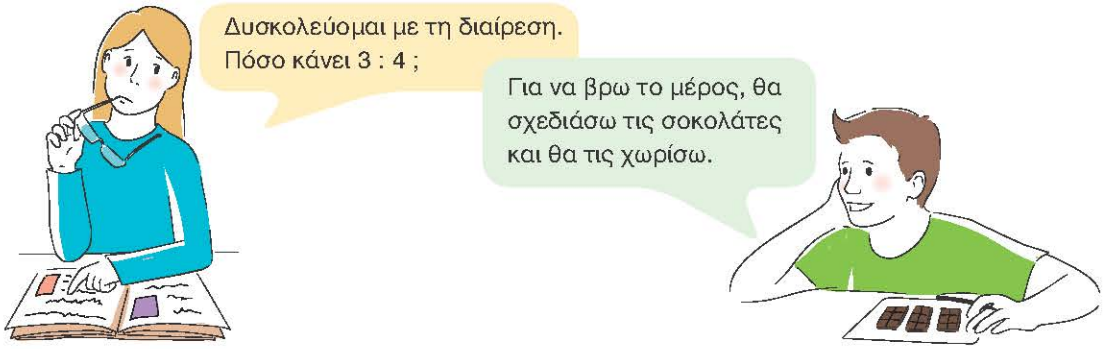
Η γιαγιά θέλει να μοιράσει εξίσου μερικές σοκολάτες στα 4 εγγόνια της.

α. Αν οι σοκολάτες είναι 8, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;

Γράφουμε την πράξη και υπολογίζουμε: .....

Όταν μοιράζουμε, το αποτέλεσμα είναι πάντοτε φυσικός αριθμός; Συζητάμε με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές μας.

β. Αν οι σοκολάτες είναι 3, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;



Εργαζόμαστε με τον τρόπο τον οποίο μας προτείνει ο Νίκος.

Κάθε παιδί θα πάρει $\frac{\square}{\square}$ της σοκολάτας.

Παρατηρούμε το σχέδιο και συζητάμε τι δείχνουν οι όροι του κλάσματος.

Αριθμητής: .....

Παρονομαστής: ..... Άρα $\square : \square = \frac{\square}{\square}$

.....

γ. Αν οι σοκολάτες είναι 5, τι μέρος από αυτές θα πάρει το κάθε παιδί;

Εργαζόμαστε σχεδιάζοντας και χωρίζοντας τις σοκολάτες

Κάθε παιδί θα πάρει $\square \frac{\square}{\square}$ ή $\frac{\square}{\square}$ σοκολάτες.

Άρα $\square : \square = \frac{\square}{\square}$

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Κάθε κλάσμα εκφράζει το **πηλίκο της διαίρεσης** του αριθμητή διά του παρονομαστή.	$\frac{3}{4} = 3:4$, $\frac{24}{5} = 24:5$
Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί με τη μορφή κλάσματος.	$5 = 5:1 = \frac{5}{1}$ ή $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ κλπ.

Στρατηγικές διαχείρισης αριθμών

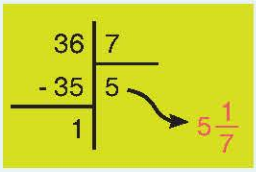
1. Μετατροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό.
Μετατρέπουμε ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή του.

Π.χ. α. $\frac{3}{10} = 3:10 = 0,3$ β. $\frac{3}{5} = 3:5 = 0,6$ γ. $\frac{7}{9} = 7:9 = 0,777...$ δ. $\frac{9}{2} = 9:2 = 4,5$

Σημείωση: *Χρησιμοποιούμε την αριθμομηχανή τσέπης, για να βρούμε το αποτέλεσμα.*

2. Μετατροπή ενός κλάσματος μεγαλύτερου της μονάδας σε μεικτό αριθμό.

π.χ. Μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{36}{7}$ σε μεικτό αριθμό.



1. Διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος με τον παρονομαστή, γιατί $\frac{36}{7} = 36:7$.
2. Ο ακέραιος του μεικτού αριθμού είναι το πηλίκο της διαίρεσης και δείχνει πόσες επτάδες χωράνε στο 36.
3. Το κλάσμα του μεικτού έχει: α. αριθμητή το υπόλοιπο της διαίρεσης και β. παρονομαστή τον διαιρέτη. Άρα $\frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$

Εφαρμογή

Ο Νίκος και οι 4 φίλοι του μοιράστηκαν εξίσου 6 μήλα.
Τι μέρος από τα μήλα πήρε το κάθε παιδί;
Θέλουμε να μοιράσουμε τα 6 μήλα στα 5 παιδιά.

α΄ τρόπος: Χωρίζουμε κάθε μήλο σε 5 ίσα μέρη, όσα είναι τα παιδιά. Κάθε κομμάτι είναι το $\frac{1}{5}$.

Κάθε παιδί θα πάρει 6 τέτοια κομμάτια, όσα είναι τα μήλα, δηλαδή $6 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

β΄ τρόπος: Θα κάνουμε διαίρεση $6:5 = \frac{6}{5}$. Κάθε παιδί πήρε τα $\frac{6}{5}$ ή $1\frac{1}{5}$ των μήλων.

Αναστοχασμός

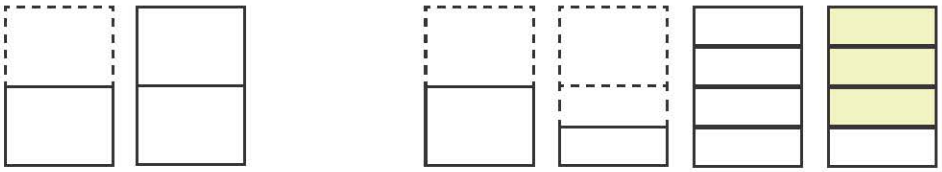
1. Ο παρονομαστής ενός κλάσματος μπορεί να είναι μηδέν;
2. Κάθε κλάσμα μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης.
   Φτιάχνουμε ένα πρόβλημα διαίρεσης. Τι δείχνει ο αριθμητής και τι ο παρονομαστής;

Διερεύνηση

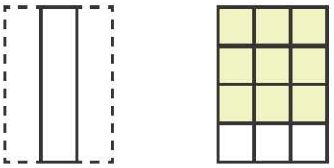
1. Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Ε΄ τάξης κάνουν συλλογή από γραμματόσημα. Παρατηρούμε την παρακάτω σελίδα.

Συζητάμε ποιο παιδί έχει δίκιο.

1. Διπλώνουμε κατάλληλα μια σελίδα Α4 και χρωματίζουμε τα $\frac{3}{4}$ της σελίδας.



2. Διπλώνουμε ξανά την ίδια σελίδα και χρωματίζουμε τα $\frac{9}{12}$ αυτής.



Συγκρίνουμε τα δύο κλάσματα.

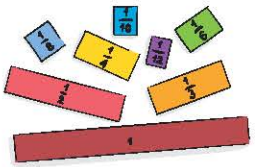
$$\frac{\square}{\square} \qquad \frac{\square}{\square}$$

Τα δυο κλάσματα εκφράζουν το ..... μέρος της σελίδας.

Πώς προκύπτουν οι όροι του κλάσματος $\frac{9}{12}$ από τους όρους του κλάσματος $\frac{3}{4}$;

.....

2. Εκφράζουμε το κλάσμα $\frac{6}{12}$ με κλάσματα που έχουν μικρότερους όρους χρησιμοποιώντας τις ράβδους κλασμάτων του παραρτήματος.



$$\frac{6}{12} = \frac{}{6} = \frac{}{4} = \frac{}{2}$$

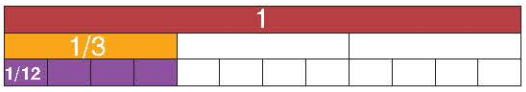
Πώς προκύπτουν οι όροι των κλασμάτων που βρήκαμε από τους όρους του $\frac{6}{12}$;

.....

.....

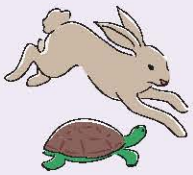
.....

Ποιο κλάσμα έχει τους μικρότερους όρους; .....

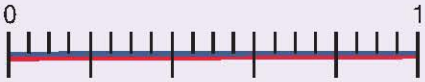
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Τα **κλάσματα** που εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός όλου λέγονται **ισοδύναμα** ή **ίσα.**	 $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$
Αν **πολλαπλασιάσουμε** τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό.	$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$
Αν **διαιρέσουμε** τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό, με μικρότερους όρους. Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση**.	$\frac{16}{24} = \frac{16 : 8}{24 : 8} = \frac{2}{3}$
Τα κλάσματα που οι όροι τους δεν απλοποιούνται λέγονται **ανάγωγα**.	$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{1}{8}$

Εφαρμογή

1. Ο λαγός και η χελώνα τρέχουν την ίδια διαδρομή. Ο λαγός έχει διανύσει τα $\frac{8}{20}$ της διαδρομής και η χελώνα τα $\frac{2}{5}$ της. Να τοποθετήσετε τα δύο κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή. Τι παρατηρείτε;



Τοποθετούμε τα κλάσματα στην αριθμογραμμή, την οποία χωρίζουμε κάθε φορά κατάλληλα.
Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα βρίσκονται στο ..... σημείο της αριθμογραμμής.



Επαλήθευση: Απλοποιούμε το κλάσμα $\frac{8}{20}$, ώστε να γίνει ανάγωγο.

$\frac{8}{20} = \frac{8 : \square}{20 : \square} = \frac{\square}{\square}$ ή $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{2}{5}$ Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα $\frac{8}{20}$ και $\frac{2}{5}$ είναι .....

2. Να βρείτε ένα κλάσμα μεταξύ των κλασμάτων $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.

Βρίσκουμε για καθένα από τα παραπάνω κλάσματα ένα ισοδύναμό του. $\frac{1}{3} = \frac{1 \times \square}{3 \times \square} = \frac{\square}{\square}$ και $\frac{2}{3} = \frac{2 \times \square}{3 \times \square} = \frac{\square}{\square}$

Ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{\square}{\square}$ και $\frac{\square}{\square}$ που δημιουργήσαμε, βρίσκεται το κλάσμα $\frac{\square}{\square}$.

Αναστοχασμός

1. Πόσα ισοδύναμα κλάσματα έχει κάθε κλάσμα;
2. Χρησιμοποιούμε τις ράβδους κλασμάτων του παραρτήματος και δημιουργούμε κλάσματα ισοδύναμα με το $\frac{6}{8}$.

Διερεύνηση

Τα παιδιά έχουν χωριστεί σε ζευγάρια και παίζουν ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι.

α. Ο ήρωας του Νίκου έχει καλύψει τα $\frac{4}{7}$ της πίστας-διαδρομής και του Αντρέι τα $\frac{5}{7}$.

β. Ο ήρωας της Αγγελικής έχει καλύψει τα $\frac{2}{17}$ της πίστας-διαδρομής και της Δανάης τα $\frac{2}{19}$.

γ. Ο ήρωας του Ορέστη έχει καλύψει το $\frac{1}{2}$ της πίστας-διαδρομής και της Κέλλυ τα $\frac{17}{31}$.

δ. Ο ήρωας του Σπύρου έχει καλύψει τα $\frac{16}{27}$ της πίστας-διαδρομής και της Λίας τα $\frac{18}{24}$.

Ποιος ήρωας έχει καλύψει τη μεγαλύτερη διαδρομή σε κάθε ζευγάρι;

Συγκρίνουμε τα κλάσματα (<, =, >) και περιγράφουμε τη στρατηγική που χρησιμοποιήσαμε σε κάθε περίπτωση.

α΄ ζευγάρι

$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

β΄ ζευγάρι

$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

γ΄ ζευγάρι

$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

δ΄ ζευγάρι

$\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

Στρατηγικές σύγκρισης	Εξήγηση των στρατηγικών
Στα κλάσματα που έχουν **ίσους παρονομαστές**, μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.	$\frac{5}{7} > \frac{4}{7}$ Τα 5 είναι περισσότερα από τα 4 μέρη του ίδιου μεγέθους **(έβδομα)**.
Στα κλάσματα που έχουν **ίσους αριθμητές**, μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει μικρότερο παρονομαστή.	$\frac{9}{5} > \frac{9}{6}$ Παίρνουμε ίδιο αριθμό από μέρη (9), αλλά τα **πέμπτα** είναι μεγαλύτερα σε μέγεθος μέρη από τα **έκτα**.
Ένα κλάσμα που έχει **μεγαλύτερο αριθμητή και μικρότερο παρονομαστή** από ένα άλλο κλάσμα είναι μεγαλύτερο από αυτό.	$\frac{18}{24} > \frac{16}{27}$ Παίρνουμε και περισσότερα μέρη (18) και μεγαλύτερου μεγέθους, αφού τα εικοστά τέταρτα είναι μεγαλύτερα από τα εικοστά έβδομα.
Μπορούμε να συγκρίνουμε κλάσματα χρησιμοποιώντας **ένα κοινό σημείο αναφοράς**.	$\frac{12}{13} > \frac{8}{9}$ Τα δύο κλάσματα είναι μικρότερα από το 1. Το $\frac{12}{13}$ βρίσκεται πιο κοντά στο 1, γιατί απέχει $\frac{1}{13}$, το οποίο είναι λιγότερο από το $\frac{1}{9}$ που απέχει το $\frac{8}{9}$.

Εφαρμογή

Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{3}{7}$ και $\frac{5}{8}$.

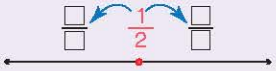
α΄ τρόπος: Μετατρέπουμε σε ισοδύναμα κλάσματα που έχουν ίδιο παρονομαστή.

- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών: Ε.Κ.Π. (7,8) = ...
- Δημιουργούμε κλάσματα ισοδύναμα με τα αρχικά με παρονομαστή ίδιο με το Ε.Κ.Π. (7,8).

  Έχουμε: $\frac{3}{7} = \frac{3 \times \square}{7 \times \square} = \frac{\square}{\square}$ και $\frac{5}{8} = \frac{5 \times \square}{8 \times \square} = \frac{\square}{\square}$.
- Συγκρίνουμε τους αριθμητές των δύο νέων κλασμάτων, άρα $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$.

β΄ τρόπος: Συγκρίνουμε ως προς ένα κοινό σημείο αναφοράς.

- Επιλέγουμε το $\frac{1}{2}$ ως σημείο αναφοράς, για να συγκρίνουμε τα δύο κλάσματα.
- Συγκρίνουμε το $\frac{5}{8}$ με το $\frac{1}{2}$. Το $\frac{1}{2}$ είναι ισοδύναμο με το $\frac{4}{8}$. Είναι $\frac{5}{8} > \frac{4}{8}$, άρα $\frac{5}{8} \square \frac{1}{2}$.
- Συγκρίνουμε το $\frac{3}{7}$ με το $\frac{1}{2}$. Το $\frac{1}{2}$ είναι ισοδύναμο με το $\frac{3}{6}$. Είναι $\frac{3}{7} < \frac{3}{6}$, άρα $\frac{3}{7} \square \frac{1}{2}$.
- Επομένως , έχουμε τελικά: $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$.



Αναστοχασμός

1. Βρίσκουμε κλάσματα που είναι μικρότερα από το $\frac{1}{2}$.
2. Τα κλάσματα $\frac{13}{15}$ και $\frac{17}{19}$ είναι ισοδύναμα ή όχι; Αιτιολογούμε την απάντησή μας.
3. Βρίσκουμε κλάσματα όσο γίνεται πιο κοντά στο 1.

Διερεύνηση

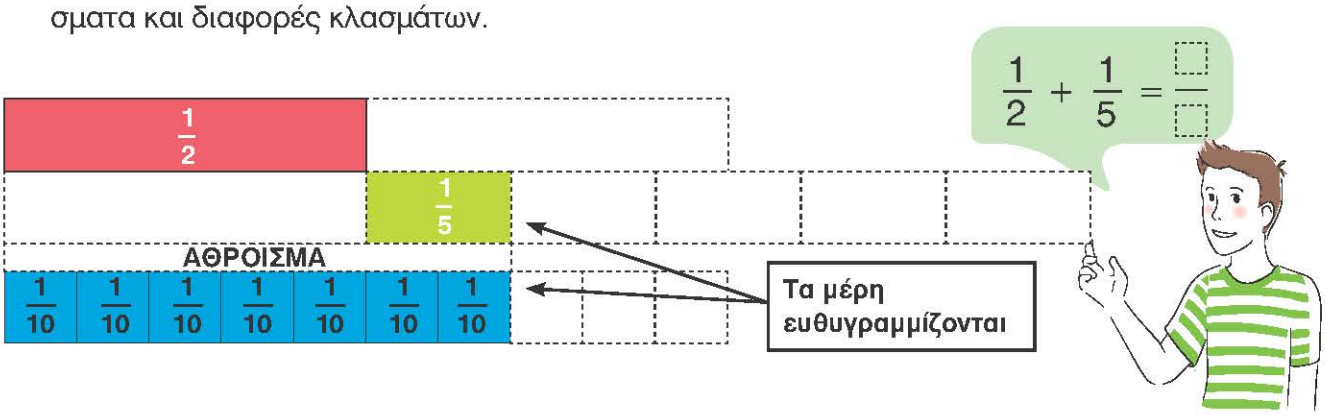
1. Χρησιμοποιούμε το τετραγωνισμένο χαρτί, για να αναπαραστήσουμε με ράβδους ή ορθογώνια τα κλάσματα και να υπολογίσουμε τα αθροίσματα και τις διαφορές:

α. $\frac{3}{8} + \frac{4}{8}$ β. $\frac{7}{8} - \frac{2}{8}$.

$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{\square}{\square}$

2. Χρησιμοποιούμε ράβδους κλασμάτων, για να αναπαραστήσουμε και να υπολογίσουμε αθροίσματα και διαφορές κλασμάτων.



α. Εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε ο Νίκος και έπειτα συμπληρώνουμε το άθροισμα.

.....

.....

β. Θα μπορούσε ο Νίκος, αντί για τις ράβδους $\frac{1}{10}$, να χρησιμοποιήσει τις ράβδους $\frac{1}{8}$;

Εξηγούμε: .....

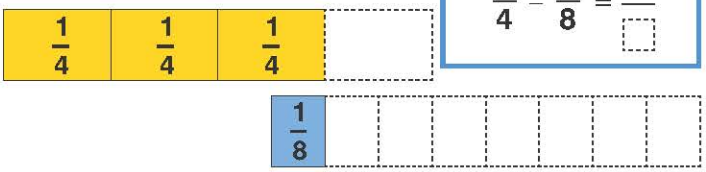
γ. Χρησιμοποιούμε τις ράβδους για να βρούμε τη διαφορά $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$.

Εξηγούμε τον τρόπο εργασίας μας.

.....

.....

.....



$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$

δ. Ποιες άλλες ράβδους θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για να αναπαραστήσουμε τη διαφορά; .....

ΔΙΑΦΟΡΑ

Συζητάμε με ποιον τρόπο προσθέτουμε και αφαιρούμε κλάσματα με ίδιους (ομώνυμα) και με διαφορετικούς (ετερώνυμα) παρονομαστές.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Τα κλάσματα που έχουν ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**, ενώ τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερώνυμα**.	$\frac{2}{5}, \frac{7}{5}$ ομώνυμα $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{9}{4}$ ετερώνυμα
Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε **ετερώνυμα κλάσματα** τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και στη συνέχεια προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές, ενώ παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο. Στο τέλος, κάνουμε απλοποίηση.	• $\frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 2}{6 \times 2} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ • $\frac{4}{3} - \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} - \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{20}{15} - \frac{9}{15} = \frac{11}{15}$

Εφαρμογή

1. **Να βρείτε το άθροισμα: $6\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}$**

α΄ τρόπος: Μετατρέπουμε τους μεικτούς αριθμούς σε κλάσματα.

$6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} =$ ……………………………………………………………………………………

β΄ τρόπος: Προσθέτουμε χωριστά τις ακέραιες μονάδες από τα κλάσματα.

$6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} = 8 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$ ……………………………………………………………

Σε κάθε περίπτωση, στο τέλος, μετατρέπουμε πάλι σε μεικτό αριθμό και, αν γίνεται, κάνουμε και απλοποίηση.

2. **Με τη βοήθεια του μοντέλου , να κάνετε την παρακάτω αφαίρεση: $3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{4}$**

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

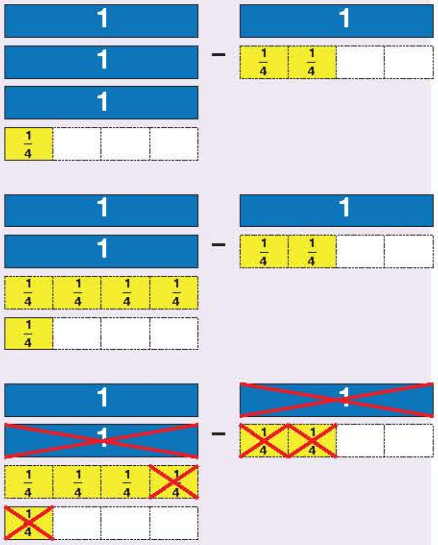
……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Περιγράφουμε τη διαδικασία:……………………………………………

……………………………………………………………………………

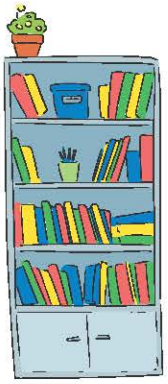
……………………………………………………………………………



Αναστοχασμός

1. Επιλέγουμε δύο κλάσματα των οποίων η διαφορά είναι $\frac{1}{4}$ και ο παρονομαστής τους είναι διαφορετικός από το 4. ……………………………………………
2. Πώς θα μπορούσε να μας βοηθήσει το Ε.Κ.Π. στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων;
3. Γιατί στην πρόσθεση πρέπει να μετατρέπουμε τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα;

Διερεύνηση

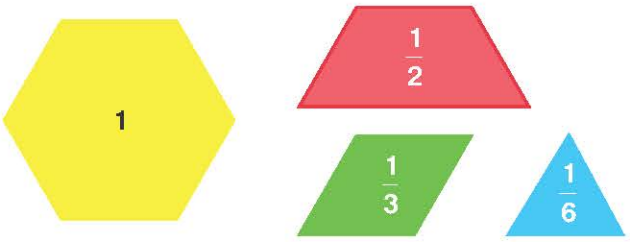


1. Κάθε ξύλινο ράφι της βιβλιοθήκης της τάξης έχει μήκος $\frac{2}{3}$ μ.

Πόσα μέτρα ξύλου θα χρειαστεί, για να αντικατασταθούν 3 ράφια;

2. Χρησιμοποιούμε τα γεωμετρικά σχήματα του παραρτήματος, για να βρούμε τα παρακάτω γινόμενα, αν το εξάγωνο είναι η ακέραιη μονάδα.

α.	$3 \times \frac{1}{2} =$	$4 \times \frac{1}{2} =$
β.	$2 \times \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{6} \times 2 =$
γ.	$6 \times \frac{1}{6} =$	$3 \times \frac{1}{3} =$

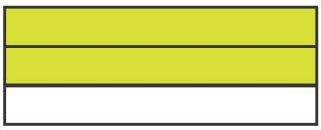


εξάγωνο

Τι παρατηρούμε σε κάθε περίπτωση στα παραπάνω γινόμενα;

3. Τα $\frac{2}{3}$ ενός οικοπέδου είναι κήπος. Στο $\frac{1}{5}$ του κήπου αυτού φυτέψαμε λουλούδια.

Τι μέρος του οικοπέδου καλύπτεται από λουλούδια;



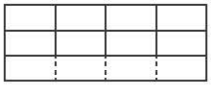
Πρέπει να βρούμε το $\frac{1}{5}$ των $\frac{2}{3}$ του κήπου, δηλαδή το $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$.

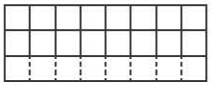
Σχεδιάζουμε στο παραπάνω σχήμα και υπολογίζουμε:

4. Βρίσκουμε τα γινόμενα με τη βοήθεια των μοντέλων αναπαράστασης.

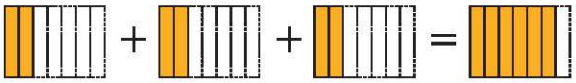
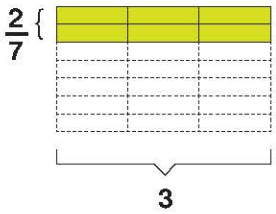
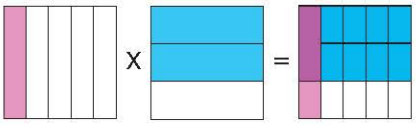
α.  $1 \times \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

β.  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

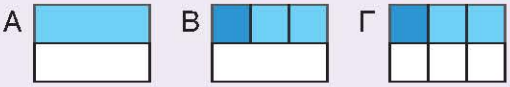
γ.  $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

δ.  $\frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

Τι θα συμβεί, αν πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα με ακόμα μικρότερες κλασματικές μονάδες;

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Στον πολλαπλασιασμό ενός **φυσικού αριθμού** με ένα κλάσμα, ο φυσικός αριθμός μάς δείχνει πόσες φορές προσθέτω το κλάσμα με τον εαυτό του. Στον πολλαπλασιασμό, αν αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων, το γινόμενο παραμένει το ίδιο.	 $3 \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7} = \frac{6}{7}$
Το **γινόμενο φυσικού αριθμού με κλάσμα** ή κλάσματος με φυσικό αριθμό είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή με τον φυσικό αριθμό και παρονομαστή τον παρονομαστή του κλάσματος.	 $\frac{2}{7} \times 3 = 3 \times \frac{2}{7}$
Όταν ζητάμε ένα **μέρος ενός αριθμού, φυσικού ή κλασματικού**, κάνουμε **πολλαπλασιασμό**.	
Το **γινόμενο δυο κλασμάτων** είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.	$\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$ Βρίσκουμε το $\frac{1}{5}$ του $\frac{2}{3}$.
Αντίστροφοι αριθμοί λέγονται δυο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι 1.	$\frac{1}{5} \times 5 = \frac{1}{5} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{5} = 1$, $\frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{35} = 1$

Εφαρμογή



1. Να βρείτε το $\frac{1}{3}$ από το $\frac{1}{2}$ μιας σοκολάτας.

α΄ τρόπος: α. Αναπαριστάνουμε τη σοκολάτα με ένα ορθογώνιο. Χρωματίζουμε το $\frac{1}{2}$. β. Χωρίζουμε το $\frac{1}{2}$ σε 3 ίσα μέρη και από αυτά χρωματίζουμε το 1. γ. Χωρίζουμε όμοια και το υπόλοιπο ορθογώνιο. Παρατηρούμε ότι το $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{2}$ του ορθογωνίου είναι το $\frac{1}{6}$ του ορθογωνίου.

β΄ τρόπος: Βρίσκουμε το $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{2}$ με πολλαπλασιασμό: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$

2. Να βρείτε το γινόμενο $2 \times 1\frac{1}{4}$.

α΄ τρόπος: $2 \times 1\frac{1}{4} = 2 \times (1 + \frac{1}{4}) = (2 \times 1) + (2 \times \frac{1}{4}) = 2 + \frac{2}{4} = 2\frac{2}{4}$

β΄ τρόπος: μετατροπή μεικτού σε κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας : $2 \times 1\frac{1}{4} = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{2}{4}$

Αναστοχασμός

1. Το γινόμενο $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το $\frac{1}{2}$;
2. Τι θα προτιμούσαμε; Τα $\frac{3}{4}$ της μισής πίτσας ή το $\frac{1}{2}$ των $\frac{3}{4}$ της ίδιας πίτσας;
3. Όταν πολλαπλασιάζουμε δυο κλάσματα μικρότερα από το 1, το γινόμενό τους είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το καθένα κλάσμα; Δίνουμε ένα παράδειγμα.

Διερεύνηση

Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Ε΄ τάξης φτιάχνουν στο μάθημα των εικαστικών αφίσες και προσκλήσεις για τις εκδηλώσεις τους.

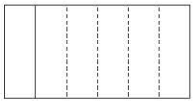
α. Τα κορίτσια φτιάχνουν προσκλήσεις με τα $\frac{2}{3}$ του χαρτονιού. Για καθεμιά χρησιμοποιούν το $\frac{1}{6}$ του χαρτονιού. Πόσες προσκλήσεις φτιάχνουν;

1. Βάζουμε ✔ στη μαθηματική πράξη που μας οδηγεί στο αποτέλεσμα:

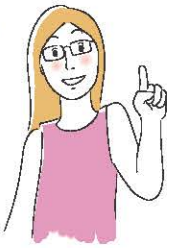
$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{6} : \frac{2}{3}$ ☐ $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ ☐

2. Χρωματίζουμε :

τα $\frac{2}{3}$ του χαρτονιού το $\frac{1}{6}$ του χαρτονιού.

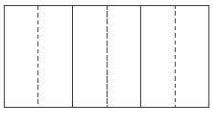


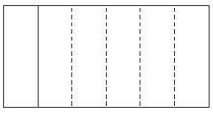
Πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{6}$ στα $\frac{2}{3}$ της ακέραιης μονάδας;



3. Ξαναχρωματίζουμε, έτσι ώστε τα δύο κλάσματα να έχουν κοινούς παρονομαστές **(ομώνυμα)** και επαναδιατυπώνουμε την ερώτηση:

«Πόσες φορές χωράει .....»





Οι κοινοί παρονομαστές δείχνουν ότι έχουμε ίδιου μεγέθους μέρη (έκτα). Αρκεί, επομένως, να διαιρέσουμε μόνο τους αριθμητές.

Κάνουμε την πράξη: $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{1}{6} = \square \div \square = \square$.

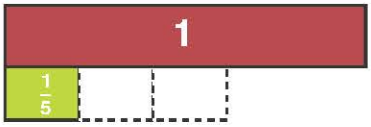
Άρα τα κορίτσια θα φτιάξουν ..... προσκλήσεις.

β. Τα αγόρια έχουν 3 ίδια χαρτόνια για να φτιάξουν αφίσες. Για καθεμιά χρησιμοποιούν τα $\frac{3}{5}$ του χαρτονιού. Πόσες αφίσες φτιάχνουν;

1. Βάζουμε ✔ στη μαθηματική πράξη που μας οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$3 \cdot \frac{3}{5}$ ☐ $3 : \frac{3}{5}$ ☐ $\frac{3}{5} : 3$ ☐

2. Χρησιμοποιούμε τις ράβδους κλασμάτων:



Πόσες φορές χωράει το $\frac{3}{5}$ στις 3 ακέραιες μονάδες;

Κάνουμε την πράξη: $3 \div \frac{3}{5} = \frac{\quad}{5} \div \frac{3}{5} = \square \div \square = \square$.

Άρα τα αγόρια θα φτιάξουν ..... αφίσες.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Για να διαιρέσουμε δυο **ομώνυμα κλάσματα**, διαιρούμε τους αριθμητές τους.	$\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = 3 : 4 = \frac{3}{4}$, $\frac{6}{8} : \frac{3}{8} = 6 : 3 = 2$
Για να **διαιρέσουμε** δυο **ετερώνυμα κλάσματα**, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και έπειτα διαιρούμε τους αριθμητές τους.	$\frac{2}{3} : \frac{6}{5} = \frac{10}{15} : \frac{18}{15} = 10 : 18 = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
Όταν σε μια διαίρεση οι αριθμοί είναι διαφορετικής μορφής, τους μετατρέπουμε όλους στην ίδια μορφή.	$2{,}5 : 3\frac{1}{2} = \frac{25}{10} : \frac{7}{2} = \frac{25}{10} : \frac{35}{10} = 25 : 35 = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

Πρόσθετη μαθηματική ιδέα

Ένας άλλος τρόπος για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα είναι να αντιστρέψουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και, αντί για διαίρεση, να κάνουμε πολλαπλασιασμό.

π.χ. $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$,

$$6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

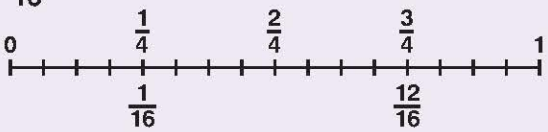
Εξήγηση του κανόνα

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Π.χ. Μοιράζω 6 μπαλόνια σε 3 παιδιά.
α. Κάνω διαίρεση: 6 : 3 = 2 μπαλόνια.
β. Κάνω πολλαπλασιασμό: Αφού τα παιδιά είναι 3, το καθένα θα πάρει το $\frac{1}{3}$ των μπαλονιών:
$6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$ μπαλόνια.
γ. Επομένως: $6 : 3 = 6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$

Σημείωση: *Ο διαιρετέος μπορεί να είναι και κλάσμα.*

Εφαρμογή

Στη γιορτή της Δανάης οι καλεσμένοι μοιράστηκαν εξίσου τα $\frac{3}{4}$ ενός ταψιού με μουσακά. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι, αν κάθε κομμάτι μουσακά ήταν $\frac{1}{16}$ του ταψιού;



α΄ τρόπος: Με τη βοήθεια της αριθμογραμμής
Στην αριθμογραμμή, από το 0 έως το 1 αντιστοιχεί ολόκληρο το ταψί. Βρίσκουμε τα $\frac{3}{4}$. Χωρίζουμε την αριθμογραμμή σε ... ίσα μέρη και παίρνουμε τα .... . Κάθε κομμάτι είναι το $\frac{1}{16}$ του ταψιού, γι' αυτό ξαναχωρίζουμε την αριθμογραμμή σε ... ίσα μέρη. Μετράμε πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{16}$ είναι στα $\frac{3}{4}$. Βρίσκουμε ..... κομμάτια, άρα οι καλεσμένοι είναι 12.

β΄ τρόπος: Δημιουργία ομώνυμων κλασμάτων: $\frac{3}{4} : \frac{1}{16} = — : — =$ ..... καλεσμένοι.

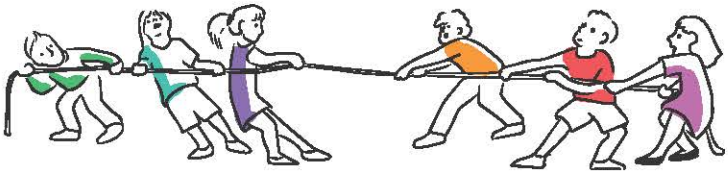
γ΄ τρόπος: Αντιστροφή του διαιρέτη και πολλαπλασιασμός: $\frac{3}{4} : \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \times — = \frac{48}{}$ = ... καλεσμένοι

Αναστοχασμός

1. Μοιράζουμε το $\frac{1}{2}$ μιας σοκολάτας σε 4 παιδιά. Τι μέρος της σοκολάτας θα πάρει το κάθε παιδί;
2. Συζητάμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα Δημιουργούμε μια αφίσα με τους τρόπους αυτούς.

Διερεύνηση

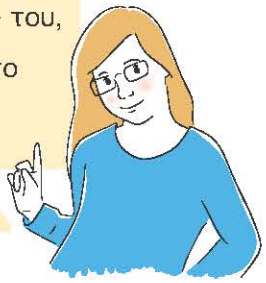
1. Τα παιδιά στην αυλή του σχολείου έπαιξαν το παιχνίδι «διελκυστίνδα». Είχαν ένα σκοινί μήκους 20 μέτρων. Για να παίξουν το παιχνίδι, χρησιμοποίησαν τα $\frac{2}{5}$ του σκοινιού. Πόσα μέτρα σκοινιού χρησιμοποίησαν;



Συζητάμε τους δύο τρόπους τους οποίους μας προτείνουν τα παιδιά.

Θέλουμε να βρούμε ένα μέρος του σκοινιού. Κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Γνωρίζουμε το μήκος όλου του σκοινιού. Για να βρούμε τα $\frac{2}{5}$ του, μπορούμε να βρούμε πρώτα το μήκος του $\frac{1}{5}$.



Τα $\frac{5}{5}$ του σκοινιού είναι ☐ μέτρα.

Το $\frac{1}{5}$ του σκοινιού είναι ☐ : 5= 4 μέτρα.

Τα $\frac{2}{5}$ του σκοινιού είναι ☐ x ☐ = 8 μέτρα.

Χρησιμοποίησαν ..... μέτρα σκοινιού.

2. Φτιάχνουμε **ένα αντίστροφο** με το παραπάνω **πρόβλημα** και το λύνουμε.

.....

.....

.....

.....

Γνωρίζουμε το μέρος του σκοινιού που χρησιμοποίησαν και αναζητούμε το μήκος όλου του σκοινιού.

Τα $\frac{2}{5}$ του σκοινιού είναι ..... μέτρα.

Το $\frac{1}{5}$ του σκοινιού είναι ..... : 2= ..... μέτρα.

Τα $\frac{5}{5}$ του σκοινιού είναι .... = ... μέτρα.

Όλο το σκοινί είχε μήκος ..... μέτρα.

Στρατηγική επίλυση προβλήματος

Χρησιμοποιούμε **τη μέθοδο της αναγωγής στην κλασματική μονάδα**, όταν :

1. Γνωρίζουμε το όλο και θέλουμε να βρούμε ένα κλασματικό του μέρος.

2. Γνωρίζουμε ένα κλασματικό μέρος του όλου και θέλουμε να βρούμε:
   α) το όλο ή
   β) ένα άλλο κλασματικό μέρος του όλου.

Παραδείγματα

1. Πόσα γραμμάρια είναι τα $\frac{4}{10}$ του κιλού;

2α. Τα $\frac{3}{5}$ του σχολείου μας είναι 93 παιδιά. Πόσα παιδιά φοιτούν στο σχολείο μας;

2β. Τα $\frac{2}{5}$ μιας σοκολάτας ζυγίζουν 50 γραμμάρια. Ο Μπιλ έφαγε τα $\frac{3}{5}$ αυτής. Πόσα γραμμάρια της σοκολάτας έφαγε;

Εφαρμογή **Υπολογίζω το κλασματικό μέρος του όλου, όταν γνωρίζω κάποιο άλλο κλασματικό του μέρος.**

Τα $\frac{2}{5}$ μιας σοκολάτας ζυγίζουν 50 γραμμάρια. Ο Νίκος έφαγε τα $\frac{3}{5}$ αυτής. Πόσα γραμμάρια της σοκολάτας έφαγε;

$\frac{1}{5}$

Σκέψη

- Γνωρίζουμε ότι τα $\frac{2}{5}$ της σοκολάτας ζυγίζουν 50 γραμμάρια και θέλουμε να βρούμε πόσα γραμμάρια ζυγίζουν τα $\frac{3}{5}$ της σοκολάτας.
- Βρίσκουμε πρώτα την τιμή της κλασματικής μονάδας, δηλαδή του $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας.
  Αφού ξέρουμε τα $\frac{2}{5}$ και ζητάμε το $\frac{1}{5}$, διαιρούμε με το 2.
- Βρίσκουμε πόσο ζυγίζουν τα $\frac{3}{5}$ της σοκολάτας.

Αφού ξέρουμε το $\frac{1}{5}$ και ζητάμε τα $\frac{3}{5}$, πολλαπλασιάζουμε με το 3.

Λύση

- Τα $\frac{2}{5}$ της σοκολάτας ζυγίζουν ..... γραμμάρια.
- Το $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας ζυγίζει ..... : ..... = ... γραμμάρια.
- Τα $\frac{3}{5}$ της σοκολάτας ζυγίζουν ..... x ..... = ... γραμμάρια.

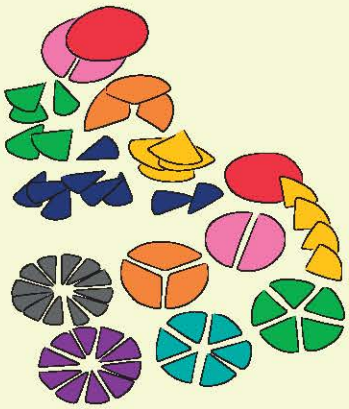
Απάντηση: Ο Νίκος έφαγε τα ..... γραμμάρια της σοκολάτας.

Αναστοχασμός

Γιατί η παραπάνω στρατηγική επίλυσης προβλήματος ονομάζεται **μέθοδος αναγωγής στην κλασματική μονάδα**;

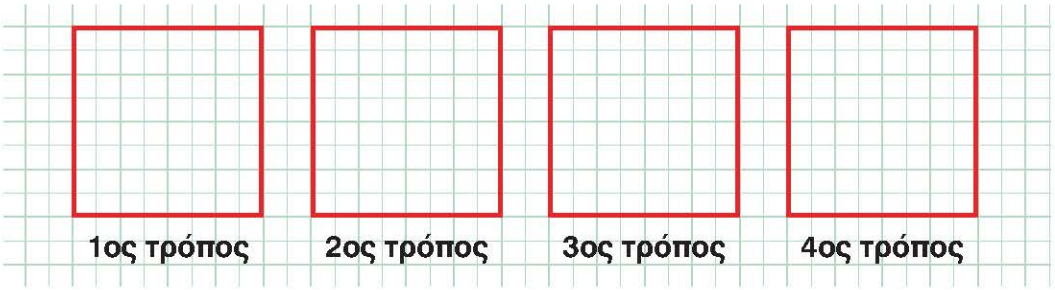
Στα κεφάλαια αυτά έμαθα:

- ✓ **να εκφράζω: α) το μέρος ενός όλου με κλάσμα, β) το πηλίκο μιας διαίρεσης με κλάσμα,**
- ✓ **να τοποθετώ κλασματικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή,**
- ✓ **να διατάσσω και να συγκρίνω κλασματικούς αριθμούς,**
- ✓ **να αναγνωρίζω, να κατασκευάζω και να απλοποιώ ισοδύναμα κλάσματα,**
- ✓ **να κάνω πράξεις με κλάσματα και με μεικτούς αριθμούς,**
- ✓ **να λύνω προβλήματα με κλασματικούς αριθμούς.**



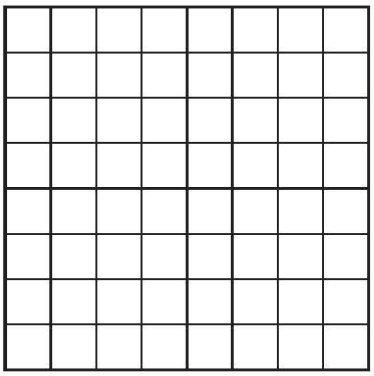
1η Άσκηση

α. Χωρίζουμε τα παρακάτω τετράγωνα σε τέσσερα ίσα μέρη με διαφορετικό τρόπο το καθένα.



β. Χρωματίζουμε στο διπλανό τετράγωνο:

- το $\frac{1}{2}$ του τετράγωνου κίτρινο
- το $\frac{1}{8}$ του τετράγωνου μπλε
- το $\frac{1}{4}$ του τετράγωνου κόκκινο
- το $\frac{1}{16}$ του τετράγωνου πράσινο



• Τι μέρος του τετραγώνου έμεινε αχρωμάτιστο; .....

2η Άσκηση

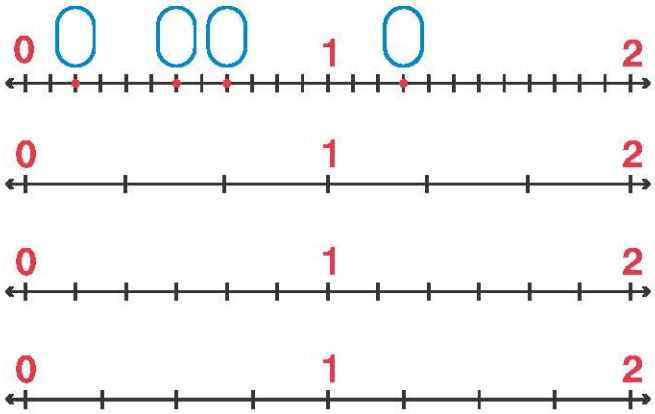
Βρίσκουμε τρία κλάσματα μεγαλύτερα από το $\frac{1}{7}$ και μικρότερα από το $\frac{2}{7}$.

.....

.....

3η Άσκηση

α. Συμπληρώνουμε στα κουτάκια τους κλασματικούς αριθμούς που βρίσκονται στα σημεία πάνω στην πρώτη αριθμογραμμή.



β. Τοποθετούμε στην κατάλληλη αριθμογραμμή το ισοδύναμο ανάγωγο κλάσμα για κάθε κλασματικό αριθμό που γράψαμε.

4η Άσκηση

Βρίσκουμε τον αμέσως προηγούμενο και επόμενο φυσικό αριθμό σε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα και μεικτούς αριθμούς.

☐	$\frac{2}{8}$	☐
☐	$\frac{11}{5}$	☐
☐	$\frac{21}{6}$	☐
☐	$3\frac{1}{4}$	☐

1ο Πρόβλημα

Διαβάζουμε σε μια συνταγή τα υλικά και τις ποσότητες που θα χρειαστούμε, ώστε να φτιάξουμε μπισκότα με τους φίλους και τις φίλες μας.
Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις θα φτιάξουμε μεγαλύτερη ποσότητα μπισκότων;
Υπογραμμίζουμε τη σωστή απάντηση και εξηγούμε την επιλογή μας.

α. Όταν πολλαπλασιάσουμε την ποσότητα των υλικών με το $\frac{1}{2}$.

β. Όταν πολλαπλασιάσουμε την ποσότητα των υλικών με το 2.

γ. Όταν διαιρέσουμε την ποσότητα των υλικών με το $\frac{1}{3}$.

δ. Όταν διαιρέσουμε την ποσότητα των υλικών με το 3.